TEORIA dei SEGNALI - SEGNALI ALEATORI

prof Michele Morelli

⇒ Lezione del 27/02/12

- Libro di testo consigliato: Luise, Vitetta, "Teoria dei segnali" - McGraw Hill

e-mail: michele.morelli@iet.unipi.it (scrivere per i ricevimenti)

Argomenti del corso:

1) teoria della probabilità
2) variabili aleatorie
3) vettori di variabili aleatorie
4) segnali aleatori

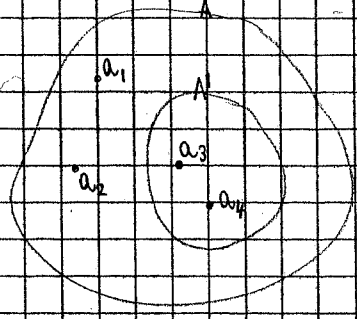
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

- PROBABILITA' (introduzione)

→ TEORIA degli INSIEMI

$a_1 \in A$

$A' \subseteq A$ se e solo se $x \in A' \Rightarrow x \in A \ \forall x$



L'insieme universo U o Ω è un insieme t.c.

U = tutti i possibili insiemi

- unione: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$ (anche $A+B$)
- intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$ (anche $A \cdot B$)
- differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ (anche $A - B$)
- complemento: $\bar{A} = U \setminus A = \{x \in U \text{ e } x \notin A\}$

- A e B sono disgiunti se non hanno elementi in comune, ovvero se e solo se $A \cap B = \emptyset$.
- cardinalità di A: nº di elementi di A, indicata con $\text{card}\{A\}$.

  N.B.: può essere finita o infinita; se è infinita a sua volta può essere numerabile ($\mathbb{N}, \mathbb{Q}$) oppure continua (o semplicemente non numerabile) ($\mathbb{R}$).
- partizione di B: è un insieme di insiemi A_i t.c.

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = B \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{se } i \neq j \end{cases}$$

  cioè t.c. coprono tutto B e sono a due a due disgiunti.

→ CALCOLO COMBINATORIO

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

- fattoriale:

$$\begin{cases} n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 0! = 1 \quad \text{(per definizione)} \end{cases}$$

  ricorsivamente: $n! = n \cdot (n-1)!$
- permutazioni: le permutazioni di n oggetti sono tutti i modi di mettere in fila gli n oggetti

  es. A, B, C: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

  In generale: $P_n = n!$
- disposizioni: si ha un insieme di n oggetti da cui se ne estraggono K (senza rimetterli uno ad uno dentro). Le disposizioni di questi n oggetti presi a gruppi di K in cui conta l'ordine sono date da:

$$K \text{ D } n = \frac{n!}{(n-K)!}$$

  es. (a, b, c) → ab, ba, ac, ca, bc, cb

  2 D 3 = 6
- combinazioni: si ha un insieme di n oggetti da cui se ne estraggono K formando gruppi in cui non conta l'ordine. Le combinazioni di questi n oggetti presi a gruppi di K sono date da:

$$C_{n,K} = \frac{D_{n,K}}{P_K} = \frac{n!}{(n-K)!\,K!} = \binom{n}{K} \quad \text{(coeff. binomiale)}$$

Nel binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

- PROBABILITÀ

Ci possono essere due tipi di esperimenti:

- DETERMINISTICI, in cui si sa già cosa aspettarsi perché c'è una legge rigorosa che mi produce il risultato.
- ALEATORI, in cui non ci sono leggi che predicono il risultato (es. tiro un dado non truccato)

N.B.: In generale si può studiare la frequenza delle uscite dopo tante tentative.

PROVA: esecuzione di un esperimento (una istanza) che produce un RISULTATO

ESPERIMENTO: insieme di tutte le prove

SPAZIO CAMPIONE: insieme Ω dei risultati ottenibili in ogni prova

es. $\mathcal{E}$ = "lancio una moneta" $\Rightarrow \Omega = \{T, C\}$

EVENTO: un evento A è un qualsiasi sottinsieme di Ω.

es. $\mathcal{E}$ = "lancio un dado" A = "esce una faccia pari"

$$A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$$

Gli elementi di un evento A sono detti "risultati favorevoli ad A"

Si dice che in una prova si è verificato l'evento A se e solo se è uscito uno qualsiasi dei risultati favorevoli.

Un evento può essere anche (cioè non deve appartenere necessariamente a una delle categorie):

- CERTO: è per definizione Ω stesso, che si verifica sempre.
- IMPOSSIBILE: " " $\emptyset$, che non si può verificare mai.
- ELEMENTARE: se contiene solo un risultato favorevole.

Definizione di PROBABILITÀ (①, Laplace): si applica ad Ω di cardinalità finita in cui gli eventi sono "equiprobabili". Detti $m_A = \text{card}\{A\}$ e $M = \text{card}\{\Omega\} \subseteq \mathbb{N}$, la probabilità è una funzione $\Pr: A \mapsto [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ t.c.

$$\Pr(A) = \frac{m_A}{M} = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}}$$

Vantaggio: non dobbiamo fare prove!

Ma, se per esempio il dado fosse truccato, non si potrebbe più sapere niente a priori: non si ha più la garanzia che i risultati siano equiprobabili, perciò introduciamo un'altra definizione di probabilità.

Definizione di PROBABILITÀ (②, frequentista, 1936, Von Mises): si effettuano n prove. Per trovare la probabilità di un evento A, contiamo quante volte sulle n prove A si è verificato.

$$\Pr(A) \approx \frac{n_A}{n}$$

Questa però è un'approssimazione, perché la definizione corretta (ma impraticabile) è questa:

$$\Pr(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Definizione di PROBABILITÀ (③, assiomatica, 1933 Kolmogorov, più moderna): non dà una definizione, bensì 3 "regole" (assiomi)

1) la probabilità dell'evento certo è 1 ($\Pr(\Omega) = 1$);
2) la probabilità di un qualsiasi evento A è $\Pr(A) \geq 0$;
3) se due eventi sono disgiunti, ovvero $A \cap B = \emptyset$, allora

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

In generale la definizione più usata è quella di Von Mises (②). Verifichiamo che rispetti anche i 3 assiomi della terza definizione.

$$\Pr(A) \approx \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

1) $Pr(\Omega) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$ (perché $n_\Omega = N$) OK

2) $Pr(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{N} \geq 0$ ($n_A \to \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$) OK

3) A e B disgiunti. O si verifica uno dei due o non se ne verifica nemmeno 1: $n_A + n_B = n_{A\cup B}$

$$Pr(A\cup B) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A + n_B}{n} = Pr(A) + Pr(B) \quad \text{OK}$$

- Consideriamo degli spazi campionari di dimensione finita. Sia Ω t.c. $\dim(\Omega) = M$.

Come posso assegnargli un sistema di probabilità?

Devo:
- definire un esperimento
- individuare possibili risultati $\omega_i \in \Omega$
- assegnare una p agli eventi elementari

$$Pr(\{\omega_i\}) = p_i \qquad \forall i = 1, \dots, M$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Poiché $\Omega = \bigcup_{i=1}^{M} \{\omega_i\}$ (unione degli eventi elementari che sono tra loro disgiunti):

$$Pr(\Omega) = \sum Pr(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{M} p_i = 1$$

($\sum$: 3° assioma; $= 1$: 1° assioma)

N.B.: se si ha un modello di probabilità uniforme le singole p_i sono pari a $1/M$

Quindi questa è un'importante proprietà: $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$

es.

	ω_1	ω_2	ω_3
Pr	1/4	1/2	1/4

$A = \{\omega_2, \omega_3\}$

$$Pr(A) = Pr(\{\omega_2\} \cup \{\omega_3\}) = Pr(\{\omega_2\}) + Pr(\{\omega_3\}) = \frac{3}{4}$$

Morale: la probabilità di qualsiasi A è riscrivibile in termini di probabilità di eventi elementari (non questo è sufficiente definire quelli!)