INTRODUZIONE: MAXWELL (pag. 237 libro fisica)

Tutti i fenomeni elettrici sono governati dalla legge di Maxwell: $\oint \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = 0$ cioè il flusso del campo magnetico per una superficie chiusa è nullo (si pensi alle linee di campo).
Vi è inoltre:

LEGGE DI AMPERE $I = \oint_S \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l}$ cioè la circuitazione su una linea chiusa di $\vec{B}/\mu_0$ (nel vuoto) è uguale alla corrente concatenata.

In realtà l'equazione va completata (con Maxwell): $\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$ ($\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$)

Quel termine è quello che spiega la propagazione delle onde elettromagnetiche. Noi in realtà lo trascuriamo perchè consideriamo circuiti con propagazione trascurabile, questo accade quando:

$$L \ll \frac{c}{f_{MAX}}$$

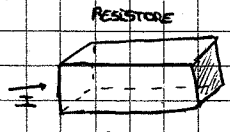
(L: LUNGHEZZA CIRCUITO; c: velocità luce; LUNGHEZZA D'ONDA)

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Se la frequenza è alta la specie è fondamentale. Il segnale arriva in ritardo infatti è il ritardo si avvicina molto alla frequenza: quando il ritardo (dovuto alla velocità delle onde elettromagnetiche) diventa considerevole rispetto alla frequenza del segnale o comunque maggiore della lunghezza del circuito, la propagazione dell'onda non può essere trascurata!

RESISTENZA

Supponiamo di avere un cilindro conduttore attraversato da corrente uniforme con una densità J ($J = \frac{I}{S}$), quindi: $I = J \cdot S$ dove S è la sezione.
Ora la tensione ai capi la ricavo come (la tensione è il lavoro per portare una carica da A a B):



$$V = \int \vec{E}\, d\vec{l}$$ (linea non chiusa (sennò è zero)) per Ohm $\sigma E = J$

quindi $V = \frac{J}{\sigma} \Delta l = \frac{I \Delta l}{\sigma S}$

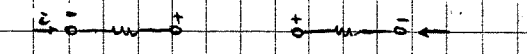
$$\boxed{V = RI} \quad \text{con} \quad R = \frac{\Delta l}{\sigma S}$$ RESISTENZA $\quad G = \frac{1}{R}$ [Siemens] CONDUTTANZA

La resistenza comunque varia a seconda della geometria, del materiale e dalla temperatura del resistore.
Tutto ciò ovviamente con le opportune ipotesi come per esempio che la corrente sia costante, uniformemente distribuita... Inoltre quella relazione vale per una certa direzione della corrente e una certa polarità della tensione, bisognerebbe quindi esprimere:



RIFERIMENTI ASSOCIATI (corrente entra dal morsetto +)

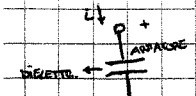
Si possono usare anche riferimenti non associati; la distinzione tra le due coppie sta nel calcolo della potenza (o assorbita dal bipolo) perchè in quanto con i riferimenti associati sarà pzo la potenza fornita al bipolo, con i rifer. non associati si ottiene pzo la potenza fornita dal bipolo.



RIFERIM. NON ASSOCIATI

Ora potremmo considerare un oggetto totalmente diverso: se esso ha la stessa resistenza esso ha una stessa relazione TENSIONE-CORRENTE; si parla in tal caso di EQUIVALENZA AGLI EFFETTI ESTERNI. Inseriti in un circuito i due oggetti lavorano allo stesso modo anche se possono avere materiali e forme differenti.

CONDENSATORE E INDUTTORE



Voglio la relazione tensione-corrente. Parto sapendo che:

$$Q = CV \quad [F]$$

(retta nel piano tensione-carica elettrica)

(Q: carica su un'armatura)

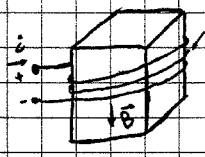
La corrente non è che uno spostamento di cariche: $i = \frac{dQ}{dt}$! $\Rightarrow$ $q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau = q(0) + \int_{0}^{t} i(\tau)\,d\tau$

$$\boxed{V = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau + \frac{1}{C}q_0}$$

T/C CONDENSATORE

($\equiv V_0$, tensione iniziale)

La capacità C dipende dalla forma delle armature e dal materiale dielettrico usato.



Utilizziamo la legge di Faraday: $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ (tensione indotta, flusso)

Flusso concatenato: $\Phi_c = NB_1S$ con l'ipotesi di $\vec{B}$ costanti

$= NK N_2 = Li$ (retta nel piano corrente-flusso magnetico)

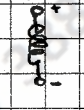
(N: num spire; il campo è legato alla corrente anche tramite il coeff. K)

COEFF. AUTOINDUZIONE ($L = N^2K$)

Il parametro L (induttanza) è il coefficiente di proporzionalità tra corrente in un conduttore e flusso magnetico prodotto da quella stessa corrente e si misura in Henry [H].

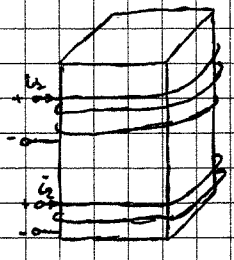
Per Faraday: $e = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow e = -L\frac{di}{dt}$

con $V = -e$: $\boxed{V = L\frac{di(t)}{dt}}$ T/C INDUTTORE



MASTER COPY
Tel. 388/9837745

INDUTTORI MUTUAMENTE ACCOPPIATI



Il flusso concatenato con una superficie può essere prodotto anche da correnti che non circolano nell'induttore stesso (fenomeno di MUTUO ACCOPPIAMENTO).

$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2$ (Φ_1: flusso concatenato alla corrente i_1; $M_{12} i_2$: contributo della corrente i_2 sulla 1)

$\Phi_2 = L_2 i_2 + M_{21} i_1$

L_1 ed L_2 sono dette AUTO-INDUTTANZE, sono valori strettamente positivi e sono le induttanze dei due avvolgimenti considerati isolati. M è detto MUTUA-INDUTTANZA e descrive l'intensità dell'accoppiamento.

Ora se supponiamo che la corrente i_1 è nulla ricaviamo che il flusso Φ_2 è proporzionale alla corrente i_2 e quindi:

$$M_{12} = \frac{\Phi_2}{i_2}$$

In particolare:

$M_{12} = M_{21}$ e inoltre $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$

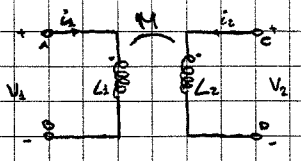
Ora si vuole ricavare la relazione tensione-corrente. Come visto prima cerchiamo di usare la legge di Faraday ($\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$): in tal caso l'unico modo per cui il flusso vari è che varino le correnti i_1 e i_2 ammesso che il mezzo è immodificabile.

$$V_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Ora il sistema si rappresenta in questo modo: è un doppio bipolo in realtà in quanto ha quattro morsetti e quindi avremo una coppia di tensioni e di correnti. Notiamo che vi sono dei pallini: con riferim. associatori ($v_1 i_1$ e $v_2 i_2$) la caduta di tensione auto-indotta è positiva se ci si muove tra i morsetti con verso concorde alla corrente (e quindi dal + al -). La caduta di tensione di mutua hanno lo stesso segno delle tensioni di auto se le correnti entrano negli induttori dal pallino (come in figura).



Se invertiamo il segno della corrente o della tensione vuol dire cambiare molte cose: infatti per la regola della mano destra cambia la normale alle spire e quindi cambia il segno di M_{12} e M_{21}. Possiamo scrivere quindi:

(si suppone di aver invertito i_2 e la polarità di V_2)

$$V_1 = L_1 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_2'}{dt}$$

$$V_2' = -\left(M_{21} \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2'}{dt}\right) = L_2 \frac{di_2'}{dt} - M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

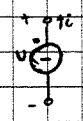
(V_2' è l'opposta di V_2)

Come regola mnemonica si può vedere facilmente che se invertiamo la corrente rispetto ai riferimenti associati va il segno meno davanti al termine di mutua induzione! Se entrambe le correnti sono invertite è come se si annullassero a vicenda e l'espressione è quella già vista!

GENERATORI

I generatori sono dei bipoli che forniscono energia al circuito. Ve ne sono due: di **CORRENTE** e di **TENSIONE**

- Un generatore di corrente è un bipolo nella cui relazione tensione-corrente non vi è traccia della tensione: per esempio $i=3$. Ciò vuol dire che ho un bipolo la cui corrente è fissata indipendentemente dalla tensione ai suoi capi: ciò vuol dire che è un generatore di **CORRENTE IDEALE!**



Invece di una costante potrei per esempio avere anche un'espressione che dipende per esempio dal tempo: $i = 3\sin(t)$ oppure $i = 5u(t)$

$u(t)$ A GRADINO: $\begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

Il fatto che sia ideale vuol dire che la corrente è sempre quella indipendentemente dagli altri oggetti presenti ai suoi morsetti. Se è costante, la relazione T-C è rappresentabile come una retta verticale nel piano tensione-corrente. È descritto solitamente con riferimenti non associati quindi $p>0$ è potenza erogata dal generatore.

- Un generatore di tensione è un bipolo che impone una d.d.p. ai suoi capi indipendente dalla corrente e dagli oggetti ai suoi capi. Se la tensione è costante, la relazione T-C è rappresentabile come una retta orizzontale nel piano tensione-corrente.



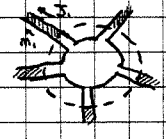
Non vi sono generatori ideali ma li si approssimano (soprattutto quello di tensione). Inoltre cosa importante è che i generatori reali sono interscambiabili tra loro!

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

LEGGI FONDAMENTALI (DI KIRCHOFF)

- Sappiamo per la legge della conservazione della carica $\oint \vec{J}\cdot d\vec{s} = 0$ (densità di corrente) che deriva a sua volta dalle equazioni di Maxwell. Quella relazione dice che la corrente che esce da una superficie chiusa (in condizioni di equilibrio) è nulla! Prendiamo per esempio un nodo in cui confluiscono più fili e lo studiamo in questo modo: considero una superficie ortogonale alla normale e scrivo:



$$\int_{S_1} \vec{J}_1\vec{m}_1\,ds + \int_{S_2} \vec{J}_2\vec{m}_2\,ds + \dots + \int_{S_5} \vec{J}_5\vec{m}_5\,ds = 0$$

PRIMO PRINCIPIO DI KIRCHOFF: la somma delle correnti uscenti da una **superficie chiusa** è nulla!

(superficie chiusa: se include più nodi è detto SUPERNODO ed equivale ad applicarlo a ogni nodo incluso)

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

In genere la convenzione è che se la corrente esce ha segno negativo, se entra positivo.

- Per il secondo principio partiamo da $\oint \vec{E}\cdot d\vec{e} = -\frac{d\Phi}{dt}$ cioè la circuitazione del campo su un percorso chiuso è proprio meno la derivata del flusso.
Supponendo che il termine a destra è già tenuto in conto dagli elementi circuitali quindi: $\oint \vec{E}\,d\vec{e} = 0$ (CAMPO ELETTR. È CONSERVATIVO)
Consideriamo quindi un percorso chiuso che interessi i bipoli e supponiamo di dividerlo in segmenti:

$$\oint_{l_1} E\,de + \oint_{l_2} E\,de + \dots + \int_{l_4} E\,de = 0$$

L'integrale del campo è per definizione la d.d.p., nel nostro caso racchiuso all'intero percorso.

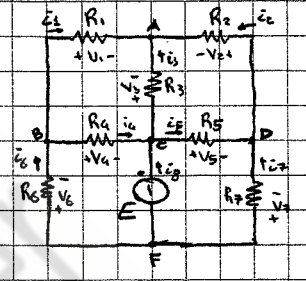
SECONDO PRINCIPIO: la somma delle tensioni in una superficie chiusa è nulla!

$$\sum_{k=1}^{N} V_k^{(t)} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

In maniera più specifica si può dire che la somma algebrica delle tensioni dei rami di una maglia è nulla dove per MAGLIA si intende un insieme di rami che formano una linea chiusa. La tensione è presa positiva se stiamo entrando il terminale +.

METODO DEL TABLEAU

Un NODO è un punto in cui convergono DUE o più ESPOSTI.
Con il metodo del tableau io ricavo le B correnti del circuito! (B equazioni).
Scriviamo il I principio di Kirchoff al primo nodo, e così via:



A) $i_1 + i_2 + i_3 = 0$
B) $i_2 + i_4 - i_6 = 0$
C) $i_4 + i_5 - i_3 - i_5 = 0$
D) $i_7 + i_5 - i_2 = 0$
F) $i_6 + i_7 + i_8 = 0$

Consideriamo di avere il caso a destra:



numero nodi = 2 (N)
equazioni utili = 1 (N-1)

Ciò vale in realtà per un qualsiasi circuito: dati:
N nodi, ricaviamo solamente N-1 equazioni utili!
Infatti sommando membro a membro le prime quattro equazioni prima ricavate si ricava la quinta:

$$\cancel{i_1} + \cancel{i_2} + \cancel{i_3} - \cancel{i_4} - \cancel{i_4} - \cancel{i_6} + \underline{i_6} + \cancel{i_4} + \underline{i_8} - \cancel{i_3} - \cancel{i_5} + \underline{i_7} + \cancel{i_5} - \cancel{i_2} = 0$$

$$i_6 + i_7 + i_8 = 0$$

Restano da ricavare B - (N-1) equazioni utili per ricavare le B tensioni per ogni ramo.
Per applicare il II principio individuiamo dei percorsi chiusi all'interno del circuito:

BACB) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$
ADCA) $-V_2 - V_5 + V_3 = 0$
CBFC) $-V_4 - V_6 - E = 0$
ABCDA) $-V_1 + V_4 + V_5 + V_2 = 0$
BCDFB) $V_4 + V_5 - V_7 + V_6 = 0$

} sommando si ottiene la 4ª ⇒ anche col II principio si ha il rischio che una equazione sia COMBINAZ. LINEARE dalle altre

Il fatto che si abbiano equazioni inutili si capisce dal fatto che il percorso ABCDA è proprio la combinazione dei primi due: ABCA e ADCA; V_3 viene preso con segno prima positivo e poi negativo annullandosi!

Quindi abbiamo 4 equazioni indipendenti delle correnti e 4 della tensione a loro volta indipendenti tra loro. Poi abbiamo 7 equazioni di tensione/corrente! Le incognite sono 15 (compresa i_8) e quindi tutto torna!
La regola generale è la seguente: vanno scelte e studiate le maglie indipendenti. Le MAGLIE INDIPENDENTI corrispondono a maglie che hanno almeno UN RAMO NON IN COMUNE. Si prenda ABCA e ACDA; sono dipendenti a ABCDA!

↓
tratto di circuito dove tutti gli elementi sono in serie

Nel caso di gener. di corrente il numero di equazioni diventa B - (N-1) - N_i dove N_i è il numero di generatori (si ignorano tali maglie).