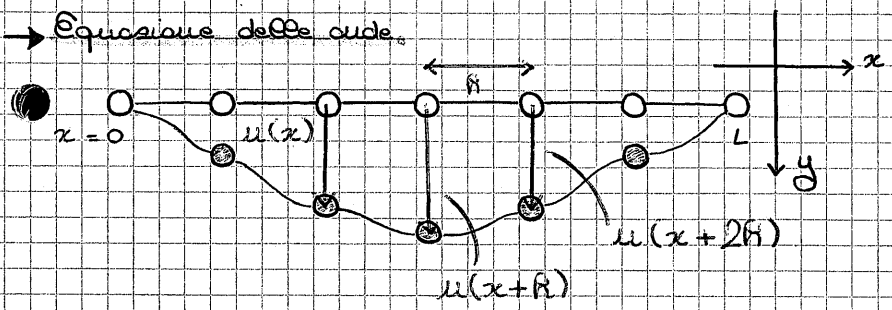
ELETTRONICA DELLO STATO SOLIDO

→ Equazione delle onde



→ Corda elastica tesa tra $x = 0$ e $x = L$ con tensione T e densità di massa lineare ρ.

$$\begin{cases} L = NR \\ M = Nm \end{cases}$$

(discretizzazione di una corda tramite masse concentrate)

→ La distribuzione continua di massa è approssimata con N masse puntiformi di valore m e distanti tra loro R

→ La corda ha costante elastica k tra ciascuna massa → $K = \frac{k}{N}$ (la molla vista in serie)

In direzione y, per la legge di Hooke:

$$F_e = -k \cdot \Delta u \quad (\text{con } \Delta u \text{ allungamento della molla in direzione } y)$$

Per il 2° principio della dinamica:

$$F_y = m a_y = m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Per la massa in posizione $x + R$:

$$m \frac{\partial^2 u(x+R,t)}{\partial t^2} = -k\left(u(x+R,t) - u(x,t)\right) - k\left(u(x+R,t) - u(x+2R,t)\right) =$$

$$= k\left(u(x+2R,t) - 2u(x+R,t) + u(x,t)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{M}{N} \cdot \frac{\partial^2 u(x+R,t)}{\partial t^2} = KN\left(u(x+2R,t) - 2u(x+R,t) + u(x,t)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u(x+R,t)}{\partial t^2} = \frac{KN^2}{M}\left(u(x+2R,t) - 2u(x+R,t) + u(x,t)\right) =$$

$$= \frac{KL^2}{M} \cdot \frac{\left(u(x+2R,t) - 2u(x+R,t) + u(x,t)\right)}{R^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \ [m/s]$$

$$\left.\begin{aligned} T &= KL \\ \rho &= \frac{M}{L} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[R \to 0]{} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)}$$

Equazione di D'Alembert

→ Condizioni al contorno:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Per risolvere l'equazione di D'Alembert, uso il metodo della separazione delle variabili:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = c^2 T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{c^2 T}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}}_{=\lambda} = \underbrace{\frac{1}{X}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{=\lambda}$$

→ entrambi i membri sono costanti (ciascuno è funzione di una variabile e non dell'altra)

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2 T}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \lambda \\ \frac{1}{X}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \lambda \end{cases} \rightarrow \text{Equazione di Helmholtz}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

→ $X(0) = X(L) = 0$ (condiz. al contorno)

$$\frac{X''(x)}{X} = \lambda \rightarrow$$

$(\lambda > 0)$ $\quad X = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

$(\lambda = 0)$ $\quad X = C_1 x + C_2$

$(\lambda < 0)$ $\quad X = A_1 e^{i\sqrt{|\lambda|}x} + A_2 e^{-i\sqrt{|\lambda|}x} =$

$$= C_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$$

→ Unica soluzione accettabile ($\lambda \geq 0$ dà soluzioni non limitate)

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0 \\ X(L) = C_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}L) = 0 \rightarrow \sqrt{|\lambda|}L = k\pi \text{ con } k = 1,2,3\ldots \end{cases}$$

$$\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad (\lambda < 0)$$

$$\boxed{X_k(x) = C_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$$

$$\frac{T''(t)}{c^2 T} = \lambda = -\left(\frac{K\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \frac{T''(t)}{T} = -\left(\frac{K\pi c}{L}\right)^2$$

$$\boxed{T(t) = a_K \cos\left(\frac{K\pi c}{L}t\right) + b_K \sin\left(\frac{K\pi c}{L}t\right)}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$u_K(x,t) = X_K(x)T_K(t)$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{K=1}^{\infty} c_K \sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right)\left\{a_K \cos\left(\frac{K\pi c}{L}t\right) + b_K \sin\left(\frac{K\pi c}{L}t\right)\right\}}$$

Condizioni iniziali $\forall x \in (0,L)$:

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{condiz di velocità iniziale nulla}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \sum_{K=1}^{\infty} c_K \sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right) \cdot b_K \cdot \frac{K\pi c}{L} = 0 \rightarrow b_K = 0$$

$$u(x,0) = \sum_{K=1}^{\infty} c_K \sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right) a_K = u_0(x) \rightarrow \text{ignoro } c_K$$

$$\int a_K \sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{R\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2\pi(R^2-K^2)}\left[L(R+K)\sin\frac{\pi x}{L}(R-K) + \right.$$

$$\left. + L(R-K)\sin\frac{\pi x}{L}(R+K)\right]$$

$$\int a_K \sin^2\left(\frac{K\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{4\pi K} a_K \left(2\pi K x - L\sin\frac{2\pi K x}{L}\right) + C$$

(C → costante di integrazione)

$$\int_0^L a_K \sin^2\left(\frac{K\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{4\pi K} a_K \cdot 2\pi K L = a_K \frac{L}{2}$$

$$a_K = \frac{2}{L}\int_0^L \underbrace{u_0(x)} \cdot \sin\left(\frac{K\pi x}{L}\right)dx \leftarrow$$

$$\rightarrow u_0(x) = \sum_{K=1}^{\infty} a_K \sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Per ciascun K si ha un certo modo di vibrazione della corda

↳ La dipendenza spaziale di $u(x,t)$ da K è data dal fattore $\sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right)$ ⇒ Rispetto delle condizioni al contorno spaziali → $X(0,t) = X(L,t) = 0$

$$u(x,t) = \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos\left(\frac{K\pi c}{L}t\right) c_K \sin\left(\frac{K\pi}{L}x\right)$$

→ Ciascun modo è un'onda stazionaria

Ciascuno degli infiniti modi di vibrazione numerabile coesiste nel tempo $\forall x \in [0,L]$ in base alla funzione $g_K(t) = a_K \cos\left(\frac{K\pi c}{L}t\right)$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

OPERATORE DI D'ALAMBERT

$\Box u(x,t) = 0$ con $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ (Vibrazioni di una corda)

$\Box \vec{E}(x,t) = 0$ con $v = c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}$ (Campo elettrico di un'onda elettromagnetica)

Qualsiasi funzione $F(x-vt)$ o $G(x+vt)$ risolve l'equazione di D'Alembert:

$\Psi = F(x-vt) + G(x+vt)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Soluzioni particolari:

$\Psi = A(\sin K(x-vt) + \sin K(x+vt) = 2A \sin Kx \cos Kvt$

(Onda stazionaria → $\lambda = \frac{2\pi}{K}$, $\omega = Kv$) → è composizione di onde viaggianti

$\Psi = A\sin K(x-vt)$
$\Psi = A\sin K(x+vt)$
} Onde viaggianti ⇒ si propagano verso $\pm x$ con velocità v

$K\bar{x} - \omega t = 2\pi \rightarrow \bar{x} = \frac{2\pi}{K} + \frac{\omega}{K}t = \lambda + vt$

↳ Lunghezza d'onda

$v = \frac{\omega}{K}$ Velocità di fase

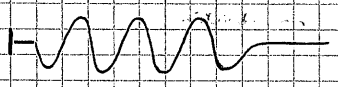
→ Notazione esponenziale:

$\Psi(x,t) = Ae^{i(Kx-\omega t)}$ dove $e^{i(Kx-\omega t)} = \cos(Kx-\omega t) + i\sin(Kx-\omega t)$

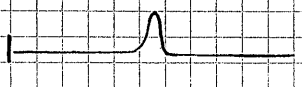
- $\Psi(x,t) = A(\cos(Kx-\omega t) + i\sin(Kx-\omega t))$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

* * *

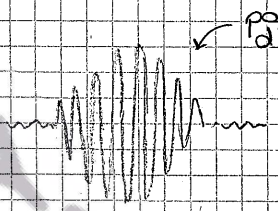


→ posso studiare la frequenza d'onda
→ Simmetrica perfetta



→ posso studiare la posizione della perturbazione
→ Delta di Dirac

Per ottenere una stima ragionevole di entrambe le quantità, costruisco i pacchetti d'onde. Per ottenere un pacchetto d'onde sommate due onde come di seguito:



- $\sin(Kx-\omega t) + \sin(K'x-\omega' t)$

con $K' = K + 2\Delta K$ e $\omega' = \omega + 2\Delta\omega$

(ΔK e $\Delta\omega$ sono piccoli incrementi)

Poiché $\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$, si ha:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = Kx - \omega t \\ \alpha + \beta = K'x - \omega' t \end{cases}$$

→ Per ottenere un pacchetto d'onde contenente un solo impulso nell'intorno e zero intervalli attendibili, basta sommare un numero di oscillazioni sufficientemente alto

$$\alpha = \frac{K+K'}{2}x - \frac{\omega+\omega'}{2}t = (K+\Delta K)x - (\omega+\Delta\omega)t \cong Kx - \omega t$$

- $\beta = \frac{K'-K}{2}x - \frac{\omega'-\omega}{2}t = \Delta Kx - \Delta\omega t$

Quindi:

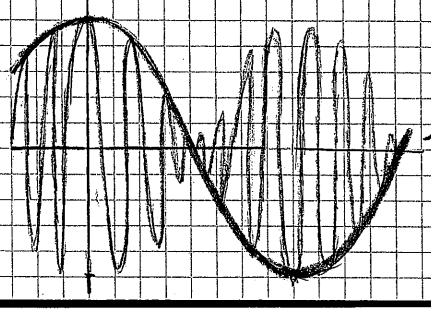
$$\sin(Kx-\omega t) + \sin(K'x-\omega' t) \cong 2\sin(Kx-\omega t)\cos(\Delta Kx - \Delta\omega t) =$$

$$= 2\sin K\left(x - \frac{\omega t}{K}\right)\cos\Delta K\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta K}t\right) = 2\sin K(x - v_g t)\cos\Delta K(x - v_g t)$$

velocità di fase — velocità di gruppo

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta K} \cong \frac{d\omega}{dK}$$

↳ La velocità di gruppo è la velocità di derivata dell'inviluppo al crescere del tempo



→ Inviluppo cosinusoidale a bassa frequenza