MATEMATICA ESSENZIALE

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

$$v \cdot u = v^T \cdot u = v_i \cdot u_i$$ risultato uno scalare

PRODOTTO VETTORIALE

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{e_1} & \hat{e_2} & \hat{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 030 8312126
Cell. 388 9837745

TENSORE DEL 2° ORDINE

Quantità costituita da 9 relazioni scalari che rappresenta una specifica trasformazione.

Simmetrico se : $T_{ij} = T_{ji}$

Antisimmetrico se : $T_{ij} = -T_{ij}$

Componente simmetrica : $T_S = (T + T^t)/2$

Componente antisimmetrica : $T_A = (T - T^t)/2$

Tensore antisimmetrico equivale ad un vettore assiale:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \not{0} & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & \not{0} & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & \not{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{23} \\ T_{13} \\ -T_{12} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} v_y + T_{13} v_z \\ -T_{12} v_x + T_{23} v_z \\ -T_{13} v_x - T_{23} v_y \end{bmatrix}$$

PRODOTTO DIADICO

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} [v_1 v_2 v_3] = u_i v_j$$

PRODOTTO SCALARE TRA TENSORI DEL 2° ORDINE

$$S : T = S_{ij} T_{ij} = tr(S^t T)$$

CONSIDERAZIONI ALGEBRICHE

$$\nabla = \begin{bmatrix} d/dx \\ d/dy \\ d/dz \end{bmatrix}$$

$$\nabla \psi = \begin{bmatrix} d\psi/dx \\ d\psi/dy \\ d\psi/dz \end{bmatrix} \quad \text{gradiente}$$

$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} du_x/dx & du_x/dy & du_x/dz \\ du_y/dx & du_y/dy & du_y/dz \\ du_z/dx & du_z/dy & du_z/dz \end{bmatrix} \quad \text{gradiente vettore}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z \quad \text{divergenza vettore}$$

$$\nabla \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad \text{divergenza tensore}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745
master copy COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

STATICA E DINAMICA DI SISTEMI ELASTICI

IL CONTINUO

Collezione di punti materiali ed è descritto da campi scalari e vettoriali che ammettono tutte le derivate necessarie rispetto al punto e al tempo

PUNTO MATERIALE

oggetto individuato nello spazio da una terna di componenti e caratterizzato un valido sistema termodinamico.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

CORPO ELASTICO DEFORMABILE

Sottoposto ad una sollecitazione di deforma dalla sua posizione di equilibrio → nascono tensioni interne che richiamano le particelle nelle posizioni originali.

SPOSTAMENTO

$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X}$ contribuiscono rotazioni e traslazioni

SPOSTAMENTO DIFFERENZIALE

$d\vec{u} = d\vec{x} - d\vec{X}$ non contribuiscono traslazioni

GRADIENTE DI SPOSTAMENTO

Tensore gradiente di spostamento:

$$E(x,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x_x} & \frac{\partial u_x}{\partial x_y} & \frac{\partial u_x}{\partial x_z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x_x} & \frac{\partial u_y}{\partial x_y} & \frac{\partial u_y}{\partial x_z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x_x} & \frac{\partial u_z}{\partial x_y} & \frac{\partial u_z}{\partial x_z} \end{bmatrix} \quad ; \quad d\vec{u} = \vec{\vec{E}}(x,t) \cdot d\vec{x}$$

$$D\vec{u} = D\vec{x} - D\vec{X}$$

$E(x,t) \quad F(x,t) \quad I$

$$\rightarrow \quad E(x,t) = F(x,t) - I.$$

F: tensore gradiente di deformazione

ad $\mathcal{E}(x,t)$ corrispondono rotazioni.

DEFORMAZIONI E STRAIN

$\Delta' = |dx|^2 - |dX|^2$ nulle per rotazioni e traslazioni

$\Delta' = dX^t [F^t F - I] dX$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$S = \frac{1}{2}[F^t F - I]$: Tensore di Strain o di deformazione

$= \frac{1}{2}[\mathcal{E}^t + \mathcal{E} + \mathcal{E}^t \mathcal{E}] = \frac{1}{2}[\nabla u^t + \nabla u + \nabla u^t \nabla u]$

consente di calcolare la deformazione Δ' valutando le componenti del campo di spostamento u.

Per piccole deformazioni : $S = \frac{1}{2}[\nabla u^t + \nabla u] = \frac{1}{2}[\mathcal{E}^t + \mathcal{E}]$

↑ componente simmetrica di $\mathcal{E}$

Semplificando :

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} du/dx & du/dy & du/dz \\ dv/dx & dv/dy & dv/dz \\ dw/dx & dw/dy & dw/dz \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

ed

$r_j = j$ con $j = x, y, z$.

$S = \frac{1}{2}[\mathcal{E}^t + \mathcal{E}]$

S_{ii} : legata alla rotazione attorno un direzione i.

S_{ij} : legata alla deformazione angolare del corpo sul piano ij.

Operatore gradiente simmetrico ∇_S :

$$S = \nabla_S \cdot \vec{u} \quad , \quad \nabla_S \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^{\,t}\right)$$

Mat $3\times 3 \equiv$ vettore 6 elementi

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1/2\,a_6 & 1/2\,a_5 \\ 1/2\,a_6 & a_2 & 1/2\,a_4 \\ 1/2\,a_5 & 1/2\,a_4 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{bmatrix} \partial u_x/\partial x \\ \partial u_y/\partial y \\ \partial u_z/\partial z \\ \partial u_z/\partial y + \partial u_y/\partial z \\ \partial u_z/\partial x + \partial u_x/\partial z \\ \partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x \end{bmatrix}$$

∇_S in forma matriciale :

$$S_i = \nabla_{ij} \cdot u_j$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \not{0} & \not{0} \\ \not{0} & \partial/\partial y & \not{0} \\ \not{0} & \not{0} & \partial/\partial z \\ \not{0} & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & \not{0} & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & \not{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745