ALGEBRA LINEARE (e ANALISI II)

Ricevimento: Venerdì 16:00 presso DMA

Ekaterina Pervova

ekaterina.pervova@dma.unipi.it

Esame → VOTO FINALE: media aritmetica

- Algebra Tappelli (I sem)
- Analisi Tappelli (II sem.)

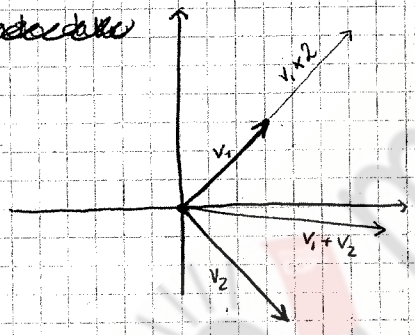
Scritto: test (soglia), esercizi

Orale

LIBRI:
- C. Petronio, Geometria e Algebra Lineare; Progetto Leonardo (Teoria)
- M. Franciosi, Esercizi di Algebra Lineare; Soc. Ed. Esculapio (Esercizi)

(Libreria Pangloss, in Via S. Lorenzo)

Introduzione "VERBOSA"



Considero, piano cartesiano e 2 punti → 2 VETTORI

- insieme di vettori
- vettori si possono sommare
- vettori si possono moltiplicare per un numero

- scelgo il punto di vista (seleziono alcuni elementi del piano)

↓

(Algebra: studio delle strutture algebriche che riflettono proprietà geometriche)

PROPRIETÀ (ci sono perché il piano esiste)

↓

Creare una DEFINIZIONE ASTRATTA prima di aver scelto un nome

↓

SPAZIO VETTORIALE: un insieme i cui elementi si possono sommare, moltiplicare per numeri e queste operazioni sono definite in modo tale da godere delle stesse proprietà che i vettori del piano cartesiano.

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Cos'altro soddisfa la definizione a destra?

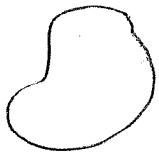
- polinomi
- funzioni

↓

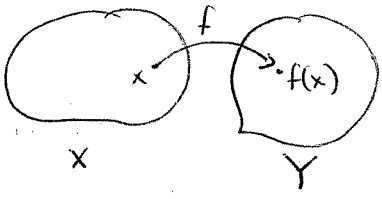
Se posso dimostrare qualche fatto usando solo le proprietà elencate nella definizione, questo fatto sarà vero sia per vettori del piano, sia per polinomi, sia per funzioni, ...

Quindi, f → strumento del creare una definizione astratta, permette di studiare più elementi differenti, con caratteristiche comuni.

INSIEMI e FUNZIONI



Insiemi: non c'è una definizione precisa: ci sono e basta.



Funzioni: composte da x, y e f (la funzione che associa a x elementi di Y)

$f: x \to y$

- per ogni $x \in X$ è definito l'unico elemento di Y chiamato $f(x)$

Nella definizione di una funzione sono importanti tutti e 3gli elementi: X, Y, la regola $x \mapsto f(x)$

- Iniettive
- surgettive
- bigettive
- ci sono funzioni che non sono né del primo, né del secondo, né del terzo

- INIETTIVA: se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ → "al massimo"
- SURGETTIVA: se $\forall\ y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$ → "al più"
- BIGETTIVA: iniettiva + surgettiva

Insiemi Numerici:

- Numeri Naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ← insieme
  - somma +, con proprietà:
    1. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n+0 = n$
    3. $\forall n, m, k \in \mathbb{N}\quad n+(m+k) = (n+m)+k$
    4. $\forall n, m \in \mathbb{N}\quad n+m = m+n$
    2. Non esiste una soluzione dell'equazione (tra i numeri reali) $n+x = 0$, tranne quando $n=0$

  Per avere proprietà 2, passiamo alla $\mathbb{Z}$
- Numeri Interi $\mathbb{Z}$, vale 1., 3., 4, $\mathbb{Z} = \{\pm 1, \pm 2, \dots\}$ → esiste l'opposto di ∀ numero; numeri negativi
- Numeri Razionali $\mathbb{Q}$
- Numeri Reali $\mathbb{R}$

Master Crazy Cosseria 388/3837745

1. SPAZI VETTORIALI

Premessa: cosa vuol dire la parola "operazione"?

Dato un insieme X

$\Rightarrow X \cdot X = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X\}$ (X per X sull'insieme X)

Definizione: un'operazione su X è una funzione $X \times X \to X$

(prendendo qualsiasi 2 elementi di X, c'è una regola prestabilita che ci dà un terzo elemento sempre di X)

Esempio: (1) $+, \cdot$ sono operazioni su $\mathbb{N}$

(2) $-, /$ non sono operazioni su $\mathbb{N}$ perché può accadere che il risultato non appartiene a $\mathbb{N}$ (o non è definito) es: quando si divide per 0

→ Definizione: Uno SPAZIO VETTORIALE REALE V è un insieme su cui è definita un'operazione $+$, chiamata somma ($V \times V \to V$) e un'operazione di moltiplicazione per numeri reali che è una mappa $\mathbb{R} \times V \to V$ $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ che godono delle seguenti proprietà (8):

perché la definizione iniziale di spazio vettoriale prevedeva la PROPRIETÀ della SOMMA tra vettori, (quindi $V \times V \to V$, perché V sono entrambi vettori che $\in V$), (quindi con $v, w \in V$; $V + V = v + w$)

e della moltiplicazione per un numero, quindi $\mathbb{R} \times V \to V$, perché moltiplico un vettore V per un numero $\mathbb{R}$ ottenendo comunque un vettore $\in V$

* Commento a margine:

$v, w \in V \Rightarrow$ è definito un terzo elemento di V che scriveremo sempre $V + w$

$\lambda \in \mathbb{R}, v \in V \Rightarrow$ * λv ha senso

1. $\exists 0 \in V \mid \forall v \in V, v + 0 = v$ — non è il numero 0, perché $0 \notin \mathbb{R}$, ma $0 \in V$
2. $\forall v \in V, \exists w \in V \mid v + w = 0$ (è sempre lo zero di V: 0^V) ← (esiste l'opposto)
3. $\forall v, w, u \in V$, si ha $v + (w + u) = (v + w) + u$ ← proprietà dell'insieme $\mathbb{N}$
4. $\forall v, w \in V$, si ha $v + w = w + v$ ←
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$ si ha $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta)v$ ($\beta \cdot v \in V$, $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$)
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$, si ha $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
7. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, w \in V$, si ha $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ ← Simile alla 6 ma si riferisce ai vettori ($v, w \in V$)
8. $1 \cdot v = v$ e $0 \cdot v = 0$ ($1 \in \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$, $0 \in V$)

$0 \in \mathbb{R}$ è il numero 0; $0 \in V$ è lo 0 che $\in V$

→ Motivazione: Da dove viene? Considerando il PIANO CARTESIANO come insieme di vettori (è un'astrazione del piano cartesiano)

Perché ne vale la pena? Ci sono molti oggetti importanti che soddisfano questa definizione ← Tecniche di manipolazione di tipo algebrico per elementi di tipo geometrico

Perché è così lunga? se scartiamo una o più parti dalla definizione, otteniamo una serie di oggetti

diversi da quello che, grazie alla domanda precedente, vogliamo considerare
(vedere gli esempi che seguono)

Esempi: (0) $r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, r \cdot n = m, m \notin \mathbb{N}$

(1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale (basta controllare che le 8 proprietà valgano)

un insieme di elementi $\mathbb{R}$ con + e $\cdot$.

(2) Sia $(\mathbb{R}, +, \circ)$ dove $\circ: \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\text{coefficienti}} \longmapsto \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{vettori}}$

un insieme di numeri reali con + e moltiplicazione per un numero $\circ$

$\alpha \circ X = X^\alpha$ perché moltiplico X per α volte:

$X \cdot X \cdot X = X^3$ perché ho moltiplicato X per α volte con $\alpha = 3$

← definita $\alpha \circ X = X^\alpha$ è uno spazio vettoriale

non è un'"per" ma significa MOLTIPLICAZIONE per NUMERI

Risposta: Controllo le proprietà

1÷4 valgono

Non dovrebbe essere $\alpha \circ (\beta \circ x) = (\alpha \circ \beta) \circ x$

$\alpha \circ (\beta \circ x) = (\alpha \circ \beta) \circ x$

$\alpha \circ (x^\beta) = (\beta^\alpha) \circ x$

$(x^\beta)^\alpha = (x^\beta)^\alpha$ ✓

← 5? $\alpha \circ (\beta \circ x) \stackrel{?}{=} \alpha \circ (x^\beta) =$

$(x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta}$

$(\alpha \cdot \beta) \circ x = x^{\alpha\beta}$

7 $\alpha \circ (x+y) \stackrel{?}{=} \alpha \circ x + \alpha \circ y$

$\alpha \circ (x+y) = (x+y)^\alpha$ (parte Sx)

$\alpha \circ x + \alpha \circ y = x^\alpha + y^\alpha$ (parte DX)

Sono quasi sempre diversi perché il quadrato della somma è ≠ dalla somma dei quadrati

Neanche 6 e 8.

la 6 perché: $x^{\alpha+\beta} \neq x^\alpha + x^\beta$

$0 \circ v = 0 \to v^0 = 1 \neq 0$ la 8 perché: $x^0 = 1 \neq 0$

Quindi: non è uno SPAZIO VETTORIALE

(3) Sia $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$, dove $x \oplus y = x \cdot y$ → lo possiamo fare perché $x \cdot y$ è un numero reale.

Già dalla prima proprietà emerge qualcosa di.

1) Chi è lo ZERO per $\oplus$? Se $\hat{0}$ è lo ZERO di $\oplus \Rightarrow \forall x \oplus \hat{0} = x, \forall x \in \mathbb{R}$

parte Sx: $x \cdot \hat{0} = x \Rightarrow \hat{0} = 1$

2) $\forall x$ dovrebbe esistere $y \mid x \oplus y = \hat{0}$

C'è sempre? $x \oplus y = \hat{0}$

$xy = -1$ → perché il prodotto degli opposti è $= -1$

incognita. Questa equazione ha soluzione $\forall x$?

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Non c'é una soluzione per $x=0$.
Ciò basta perché non valga la seconda proprietá (non é spazio vettoriale).

SOMMARIO (ALCUNE INDICAZIONI)

- Su qualsiasi insieme (ivi compresi quelli classici, come $\mathbb{R}$), si possono definire molte operazioni, che potrebbero, o meno, soddisfare proprietá richieste.
  (Bisogna sempre indicare per uno spazio vettoriale quali sono le operazioni)

- Su un insieme classico, a seconda di come definiamo l'operazione, lo ZERO potrebbe non essere tale.
  (riferimento $\hat{0}=1$, ossia riferimento alle operazioni esotiche $\oplus, \circ$)

- Tutte le proprietá (dello spazio vettoriale) sono necessarie anche perché ~~a~~ometterne alcune puó ~~consid~~ portare a considerare oggetti davvero strani (fa lavoro inutile)

mobile copy
copisteria
05018312126 388/9837715