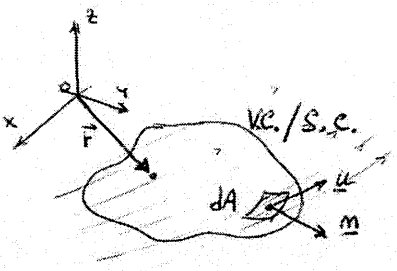
■ RICHIAMI ED EQUAZIONI BASILARI:



Dato un volume di controllo contornato da una superficie di controllo e un sistema di riferimento, vale la seguente equazione:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \int_{S.c.} \rho \mathbf{z}\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{Vc} \mathbf{z}\rho\, dV} \quad (E)$$

dove $\mathbf{Z}$ = GENERICA PROPRIETÀ ESTENSIVA DEL FLUIDO (ESTENSIVA = PROPORZIONALE A m)

$\mathbf{z}$ = corrispondente proprietà per unità di massa (specifica)

$\underline{u}$ = VELOCITÀ LOCALE

▶ Equazioni fondamentali della meccanica e della termodinamica:

$\frac{dM}{dt} = 0 \rightarrow$ CONSERVAZIONE DELLA MASSA

$\sum_i \underline{F}_i = \frac{d\underline{Q}}{dt} \rightarrow$ I° CARDINALE DELLA DINAMICA

$\sum_i \underline{M}_o = \frac{d\underline{L}}{dt} \rightarrow$ II° CARDINALE DELLA DINAMICA

$P_{term} - P_{mecc} = \frac{dE_{TOT}}{dt} \rightarrow$ I° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$\int_{S.c.} \dot{q}_{c/T}\, dA + \left(\frac{dS}{dt}\right)_{IRR} = \frac{dS}{dt} \rightarrow$ II° PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Grazie all'equazione (E) possiamo modificare le equazioni scritte sopra:

Continuità della massa:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt} = 0 = \int_{S.c.} \cancel{\rho}\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.c.} \cancel{\rho}\, dV \\ Z_1 = M \\ z = \frac{dM}{\cancel{\rho} dV} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{0 = \int_{S.c.} \rho\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.c.} \rho\, dV}$$

N.B. Potevamo anche svolgere: $\frac{d\mathcal{M}_{V.c.}}{dt} = \dot{\mathcal{M}}_{IN} - \dot{\mathcal{M}}_{OUT} = -\int_{Sc} \rho\, \underline{u}\cdot\underline{n}\, dA = \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.c.} \rho\, dV$

I° Cardinale della dinamica:

Le forze che insistono sul nostro V.C. sono di due tipi:

- FORZE DI VOLUME (o DI MASSA): ad esempio la forza di gravità.
- FORZE DI SUPERFICIE ($\underline{f}$): esse si scompongono in direzione normale e tangenziale cioè in forze di pressione e in forze viscose / di taglio.

$$\begin{cases} Z_1 = \underline{Q} \\ Z = \dfrac{\rho \underline{u}\, dV}{\rho dV} = \underline{u} \\ \sum_i \underline{F}_i = \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \displaystyle\int_{S.C.} \rho \underline{u}\,(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \underline{u}\,\rho\,dV \end{cases} \Rightarrow \boxed{\int_{V.C.} \underline{b}\,dV + \int_{S.C.} \underline{f}\,dA = \int_{S.C.} \underline{u}\,(\rho \underline{u}\cdot\underline{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \underline{u}\,\rho\,dV}$$

II° Equazione cardinale:

$$\boxed{\int_{V.C.} (\underline{r}\wedge\underline{b})\,dV + \int_{S.C.} (\underline{r}\wedge\underline{f})\,dA = \int_{S.C.} (\underline{r}\wedge\underline{u})(\rho\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} (\underline{r}\wedge\underline{u})\,\rho\,dV}$$

I° principio della termodinamica:

$$\begin{cases} Z_1 = E_{TOT} \\ Z = e_{TOT} \\ P_{Term} - P_{mecc} = \dfrac{dE_T}{dt} \end{cases}$$

$$P_{Term} = \int_{S.C.} \dot{q}_c\,dA$$ — $\dot{q}_c$: POTENZA TERMICA PER UNITÀ DI SUPERFICIE ($\dot{q}_c > 0$ CALORE INTRODOTTO NEL SISTEMA)

$$P_{mecc} = -\int_{V.C.} \underline{b}\cdot\underline{u}\,dV - \oint_{S.C.} p(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA - P_s - P_{TAN}$$

P_s: POTENZA MECCANICA SCAMBIATA FRA FLUIDO E PALE DI UN ROTORE

P_{TAN}: POTENZA MECCANICA DISSIPATA DALLE FORZE TANGENZIALI. (TRASCURABILE)

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{S.C.} \dot{q}_c\,dA - \int_{V.C.} (\underline{b}\cdot\underline{u})\,dV - \int_{S.C.} p\,(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA - P_s = \frac{dE_T}{dt} \\ \dfrac{dE_T}{dt} = \displaystyle\int_{S.C.} \rho\, e_T\, \underline{u}\cdot\underline{n}\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho\, e_T\,dV \quad \text{con } h_T = e_T + p/\rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{S.C.} \dot{q}_c\,dA - \int_{V.C.} (\underline{b}\cdot\underline{u})\,dV - P_s = \int_{S.C.} h_T\,(\rho\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho e_T\,dV}$$

II° princ. termodinamica:

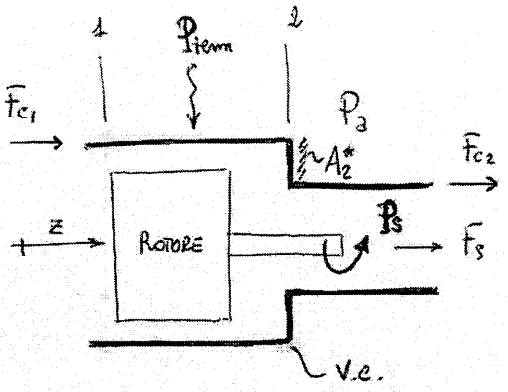
$$\boxed{\int_{S.C.} \frac{\dot{q}_c}{T}\,dA + \left(\frac{dS}{dt}\right)_{IR} = \int_{S.C.} s\,(\rho\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{V.C.} \rho s\,dV}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ESEMPI:

(Modulo del motore)

IPOTESI: 1) CONDIZIONI STAZIONARIE
2) MOTO UNIDIMENSIONALE
3) NO ATTRITO
4) SPESSORE DELLA CASSA TRASCURABILE



Conservazione della massa

$$\int_{S.c.} \rho(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA = 0 = \int_{A_1} \rho_1(\underline{u}_1\cdot\underline{n})\,dA + \int_{A_{2(tot)}} \rho_2(\underline{u}_2\cdot\underline{n})\,dA + \int_{A_{lat}} \rho(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA$$

$$= \int_{A_1} \rho_1(\underline{u}_1\cdot\underline{n})\,dA + \int_{A_2} \rho_2(\underline{u}_2\cdot\underline{n})\,dA + \cancel{\int_{A_2^*} \rho(\underline{u}_2\cdot\underline{n})\,dA} + \cancel{\int_{A_{lat}} \rho(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA}$$

$(A_{2(tot)} = A_2 + A_2^*)$; $\underline{u} = 0$; $\underline{u} \perp \underline{n}$

$$\Rightarrow -\rho u A_1 + \rho u A_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2}$$

Bilancio della quantità di moto (lungo z)

$$\Sigma F_z = \int_{S.c.} \rho\, u_z (\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA$$

$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 = \dot{m}$

$$F_{c_1} + F_{c_2} + F_s + P_1 A_1 - P_2 A_2 - P_a(A_1 - A_2) = -\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2$$

$$\boxed{F_{c_1} + F_{c_2} + F_s + (P_1 - P_a)A_1 + (P_a - P_2)A_2 = \dot{m}(u_2 - u_1)}$$

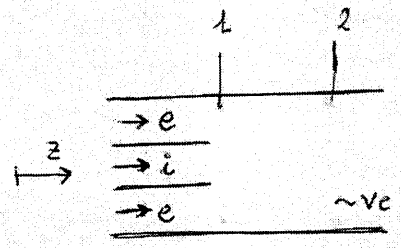
Bilancio energetico $P_{term} - P_{mecc} = \int_{S.c.} h_T \rho(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA$ $\left(\text{con } h_T = h + \frac{u^2}{2}\right)$

$P_{term} = \int_{S.c.} \dot{q}_c\,dA$; $P_{mecc} = P_s$;

$$\int_{S.c.} \dot{q}_c\,dA = P_s + \int_{S.c.} \rho\left(h + \frac{u^2}{2}\right)(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA = P_s + \int_{A_1} \rho_1 h_{T_1}(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA + \int_{A_2} \rho_2 h_{T_2}(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{term} = P_s + \dot{m}\left(h_2 + \frac{u_2^2}{2} - h_1 - \frac{u_1^2}{2}\right)}$$

(Miscelatore)



Ipotesi: 1) condizioni stazionarie
2) moto unidimensionale
3) flussi adiabatici non viscosi
4) flusso all'uscita omogeneo

Bilancio di massa) $\rho_{i_1} u_{i_1} A_{i_1} + \rho_{e_1} u_{e_1} A_{e_1} = \rho_2 u_2 A_2$

Bilancio della quantità di moto) $\sum_i F_i = \int_{s.c.} \rho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dA$ dove F_i = forze di pressione

$$\Rightarrow \quad P_i A_i + P_e A_e - P_2 A_2 = \int_{s.c.} \rho \underline{u} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dA$$

$$\Rightarrow \quad P_i A_i + P_e A_e + \rho_{i_1} u_{i_1}^2 A_i + \rho_{e_1} u_{e_1}^2 A_e = P_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2$$

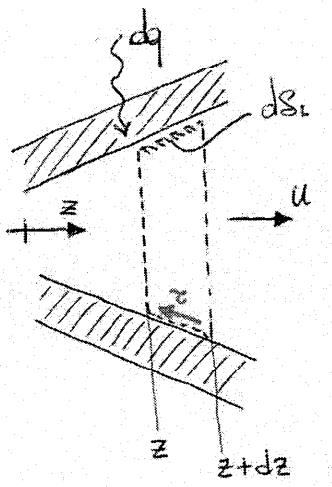
Bilancio energetico) $\cancel{P_{term.}} - \cancel{P_{mec.}} = \int_{s.c.} h_T \rho (\underline{u} \cdot \underline{n}) dA = 0$ con $h_T = h + \frac{u^2}{2}$

$$\int_{s.c.} \left(h + \frac{u^2}{2}\right) \rho (\underline{u} \cdot \underline{n}) dA = \int_{A_2} \rho_2 u_2 \left(h_2 + \frac{u_2^2}{2}\right) dA - \int_{Ae} \rho_e u_e \left(h_{e_1} + \frac{u_{e_1}^2}{2}\right) dA - \int_{Ai} \rho_{i_1} u_{i_1} \left(h_{i_1} + \frac{u_{i_1}^2}{2}\right) dA$$

$$\Rightarrow \quad \rho_2 u_2 \left(h_2 + \frac{u_2^2}{2}\right) A_2 = \rho_e u_e \left(h_{e_1} + \frac{u_{e_1}^2}{2}\right) A_e + \rho_{i_1} u_{i_1} \left(h_{i_1} + \frac{u_{i_1}^2}{2}\right) A_i$$

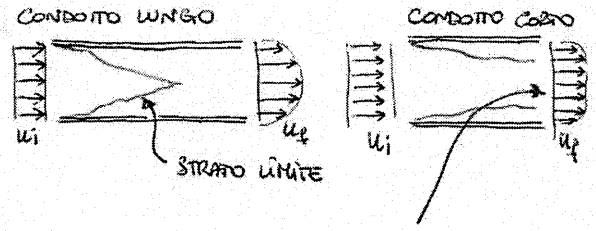
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

MOTO STAZIONARIO (modello unidimensionale):



IPOTESI:

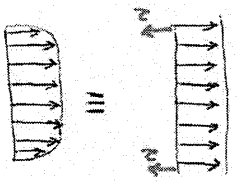
1) VARIAZIONI GRADUALI DI AREA DI FLUSSO
2) PROPRIETÀ UNIFORMI SU PIANI $\perp$ ALL'ASSE
3) GLI SCAMBI DI CALORE CAMBIANO UNIFORMEMENTE LE PROPRIETÀ SU PIANI $\perp$ ALL'ASSE.
4) EFFETTI DELLA VISCOSITÀ APPROSSIMABILI CON UNO SFORZO τ TANGENZIALE.



- Equazioni in forma differenziale:

Conservazione della massa) $\rho u A = (\rho+d\rho)(u+du)(A+dA)$ ← ORDINE INFINIT. TRASCURABILE.

$= (\rho u + \rho du + u d\rho + \cancel{du d\rho})(A+dA)$



$\Rightarrow \cancel{\rho u A} = \cancel{\rho u A} + \rho du A + u d\rho A + \rho u dA + \cancel{\rho du dA} + \cancel{u d\rho dA}$

$\Rightarrow 0 = \rho A du + u A d\rho + \rho u dA \Rightarrow \boxed{d(\rho u A) = 0}$

Bilancio della quantità di moto) $\sum_i \bar{F}_{zi} = \int_{S.C.} \rho u_z (\underline{u}\cdot\underline{n}) dA$ dove $\sum_i F_{zi} = pA - (p+dp)(A+dA) - \tau dS_L$

$\cancel{pA} - \cancel{pA} - pdA - Adp - \cancel{dpdA} - \tau dS_L = -\rho u^2 A + (\rho+d\rho)(A+dA)(u+du)^2$

$-pdA - Adp - \tau dS_L \overset{\otimes}{=} \rho u^2 dA + u^2 A d\rho + 2\rho A u du = d(\rho u^2 A)$

$\Rightarrow -pdA - \tau dS_L = d(\rho u^2 A)$

$\otimes$ MANCA LA PRESSIONE NEL TRATTO dz: $\bar{p}\,dA = \left(\frac{p+p+dp}{2}\right)dA$

Bilancio energetico) $P_{TH} - \cancel{P_S} = \int_{S.C.} \rho h_T (\underline{u}\cdot\underline{n}) dA = -\rho A u h_T + (\rho+d\rho)(A+dA)(u+du)(h_T+dh_T)$

$P_{TH} = \rho h_T A du + \rho A u dh_T + h_T A u d\rho + \rho u h_T dA$

$\uparrow dq$ $\Rightarrow$