30-9-16

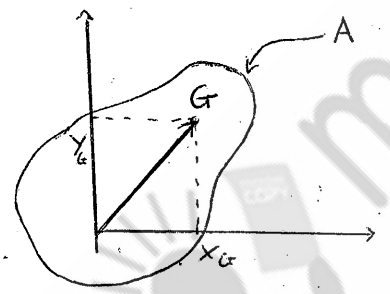
- L. Gambarotta, L. Nunziante, A. Tralli "Scienza delle costruzioni" Mc graw - Hill, 2011.
- S. Bennati, "Lezioni di scienza delle costruzioni, Parte 1. Seu - Pisa, 2004
- M. Corrado, M. Paggi, Metodo degli spostamenti, Clut Torino, 2013.

Consiglio: quello del Paggi + uno dei primi due.

GEOMETRIA DELLE AREE

Scopo: conoscere le proprietà geometriche di sezioni rette di travi, utili per i calcoli. Proprietà:

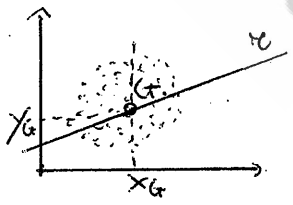
1) AREA SEZIONE (scalare)
2) POSIZIONE DEL BARICENTRO (vettoriale). Il baricentro è un punto che può appartenere, oppure no, alla sezione. Il punto è definito da coordinate, di quel determinato vettoriale.



Supponiamo di avere una generica superficie. Ci sarà un punto G detto baricentro $G(x_G, y_G)$. Le coordinate sono individuate dal vettore posizione.

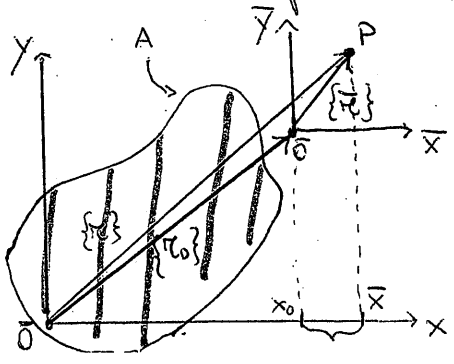
3) DIREZIONE E MOMENTI CENTRALI D'INERZIA (tensoriale)

Definiti gli assi baricentrici, (x_G, y_G), vanno a dividere la sezione in modo tale che i momenti centrali siano nulli.



La retta direzione è una retta baricentrica, che indica la distribuzione della massa intorno al baricentro. (concetto di "media", baricentro, e "varianza", linea r).

r indica quanto la massa è distribuita lungo l'asse. Avremo dunque una matrice 2 x 2 che definisce i momenti centrali d'inerzia. Momento d'inerzia alto: molto scatter rispetto al valor medio.



r: VETTORE POSIZIONE

{ r SCALARE; {r} VETTORE; [r] TENSORE 2° ORDINE (MATRICE 2x2) }

Possiamo definire anche un vettore posizione nell'altro sistema di riferimento: $\{\bar{r}\}$

MASTER COPY
Tel. 050 831226
Cell. 388 9837745

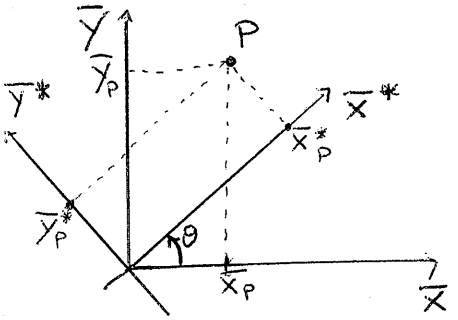
Leggi di trasformazione del vettore posizione.

1) <u>TRASLAZIONE</u>:

$\{\bar{r}\} = \{r\} - \{r_0\}$ VETTORE TRASLAZ. SISTEMA

$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix}$ ESPLICITAZIONE IN COMPONENTI.

2) <u>ROTAZIONE SISTEMA DI RIFERIMENTO</u>



VETTORE PIANO RUOTATO

$\begin{Bmatrix} \bar{x}^* \\ \bar{y}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{seno} \\ -\text{seno} & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix}$ MATRICE DI ROTAZIONE

$\{\bar{r}^*\} = [R]\{\bar{r}\}$ $\quad \det[R] = 1$

↑ MATRICE ROTAZIONE

Il determinante deve essere 1 perché si effettua una semplice rotazione, e l'area NON cambia, nemmeno la forma.

$\det[R] = 1 \Rightarrow \bar{A}^* \equiv \bar{A} \equiv A$

(AREA: $A = \int_A dA$)

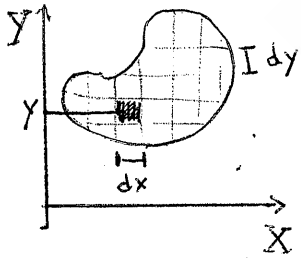
VETTORE × MATRICE = VETTORE

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$

Momenti statici $\quad [S] = L^3$

S_x (momento statico rispetto all'asse x): $S_x = \int_A y\,dA$ | PESI STATICI

$S_y = \int_A x\,dA$



$\boxed{dA = dx \cdot dy}$

S_x o S_y stabilisce l'asse rispetto al quale si calcola il peso.

In forma sintetica:

VETTORE $\{S\} = \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_A x\,dA \\ \int_A y\,dA \end{Bmatrix} = \int_A \{r\}\,dA$

Dunque il vettore momento statico è un vettore a 2 componenti, x e y.

<u>Momento statico in un sistema traslato</u>:

$\{\bar{S}\} = \int_A \{\bar{r}\}\,dA = \int_A \{r\}\,dA - \int_A \{r_0\}\,dA$ (EQ. TRASLAZIONE)

$\{S\}$

r_0: COORDINATE PUNTO "O"

$= \int_A \{r\}\,dA - \{r_0\} \cdot A$

$\Rightarrow \boxed{\{\bar{S}\} = \{S\} - A\{r_0\}}$

Sistema baricentrico $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$

Un sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ è baricentrico se $S_{\bar{X}} = S_{\bar{Y}} = 0$

Il sistema baricentrico è traslato rispetto a quello $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ generico di partenza tale che $S_{\bar{X}} = S_{\bar{Y}} = 0 \Rightarrow G_{X_G Y_G}$

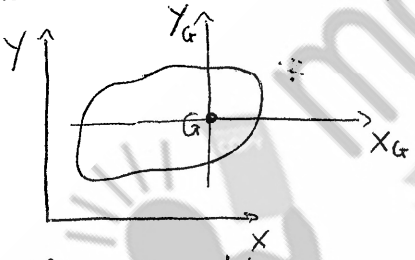
$$\bar{S} = \{0\} = \{S\} - A\{r_G\} \Rightarrow \begin{cases} S_Y - A X_G = 0 \\ S_X - A Y_G = 0 \end{cases}$$

Sistema di 2 eq in 2 inc: X_G e Y_G $\Rightarrow$

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{S_Y}{A} \\ Y_G = \dfrac{S_X}{A} \end{cases}$$

IL MOMENTO STATICO HA SIGNIFICATO VETTORIALE.

Una volta calcolati i momenti statici (numeri), per trovare il baricentro impongo la condizione che in particolare sistema di riferimento detto sistema baricentrico, le $S_{\bar{X}}$ e $S_{\bar{Y}}$ si annullano, (e l'origine coincide con il BARICENTRO). Dunque dal sistema trovo le coordinate. Mi aspetto delle X e Y poco più in alto.



X_G e Y_G annullano i momenti statici.

Momenti d'inerzia $[I] = L^4$

Come è distribuita la massa rispetto all'asse baricentrico?

- I_{xx} MOMENTO D'INERZIA RISPETTO ALL'ASSE "X" $(= I_x)$

$$I_{xx} = \int_A Y^2 \, dA$$

Sto pesando le aree con la distanza al quadrato rispetto all'asse x, integrando per tutta l'area.

- I_{yy} MOMENTO D'INERZIA RISPETTO A "Y" $(= I_y)$

$$I_{yy} = \int_A X^2 \, dA$$

- $I_{xy} = I_{yx}$ MOMENTO CENTRIFUGO D'INERZIA

$$= \int_A xy \cdot dA$$

Possiamo definire: prodotto del vettore $\{r\}$ per il suo trasposto:

$$\underset{2\times 1}{\{r\}} \cdot \underset{1\times 2}{\{r\}^T} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \cdot \{x \; y\} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Possiamo allora definire un tensore che descrive i momenti d'inerzia.

$$[I] = \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{yx} & I_x \end{bmatrix} = \int_A \{r\}\{r\}^T dA$$

La matrice è SIMMETRICA. $\begin{cases} I_y \text{ e } I_x \text{ SEMPRE POSITIVI CHECK!} \\ I_{yx} \text{ e } I_{xy} \text{ POSITIVI, O NEGATIVI O NULLI} \end{cases}$

Relazione tra $[\bar{I}]$ (sistema traslato) e $[I]$

$$[\bar{I}] = \int_A \{\bar{r}\}\{\bar{r}\}^T dA = \int_A (\{r\} - \{r_0\})(\{r\} - \{r_0\})^T dA =$$

↑ EQ. TRASLAZIONE

$$= \int_A \{r\}\{r\}^T dA - \int_A \{r_0\}\{r\}^T dA - \int_A \{r_0\}^T\{r\}\, dA + \int_A \{r_0\}\{r_0\}^T dA =$$

$$= [I] - \{r_0\}\cdot\{S\}^T - \{S\}\{r_0\}^T + \{r_0\}\{r_0\}^T A \quad *$$

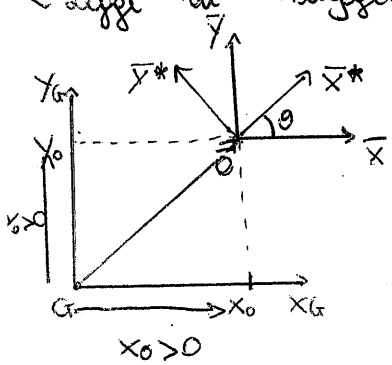
Se l'origine $O \equiv G$ (dunque applico le leggi di traslazione in un sistema baricentrico), allora:

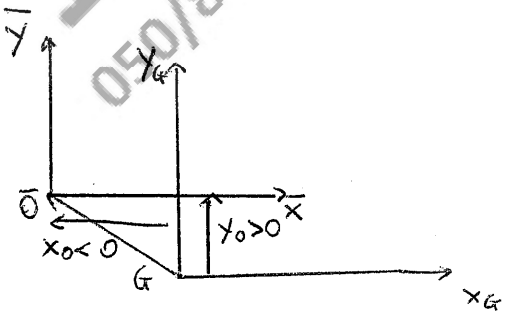
$$\{S\} \equiv \{S_G\} = \{0\} = *$$

$$\begin{cases} I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{x_G x_G} + A\, y_0^2 \\ I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{y_G y_G} + A\, x_0^2 \\ I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{x_G y_G} + A\, x_0 y_0 \end{cases}$$

Dicono come varia il momento d'inerzia rispetto ad un sistema di riferimento traslato di x_0 e y_0. Il momento diventa sempre maggiore, se e quello minimale! perché $A\, y_0^2 > 0$

Per il $I_{\bar{x}\bar{y}}$ caso più critico. Leggi di Huygens





Ruotando il sistema di riferimento?

$[\bar{I}^*] = [R]\cdot[\bar{I}]\cdot[R^T]$ Nel caso di rotazione (θ)

Il sistema ruotato tale che $I_{x^*y^*} = 0$ è detto SISTEMA PRINCIPALE D'INERZIA: MOMENTO CENTRIFUGO NULLO.

Sistema BARICENTRICO + PRINCIPALE => CENTRALE.

Master Copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

3-10-16

FORMULE DI HUYGEMS:

$$\begin{cases} I_{\bar{x}\bar{x}} = I_{x_G x_G} + A y_0^2 \\ I_{\bar{y}\bar{y}} = I_{y_G y_G} + A x_0^2 \\ I_{\bar{x}\bar{y}} = I_{x_G y_G} + A x_0 y_0 \end{cases}$$

COORDINATE BARICENTRO

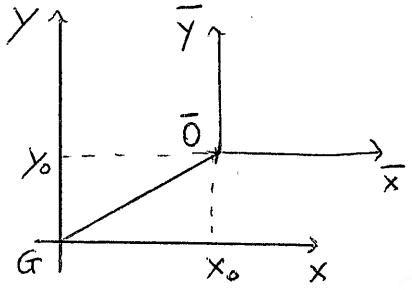
$$x_G = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{S_x}{A}$$

QUESTE FORMULE VALGONO SOLO SE SI PASSA DA UN SISTEMA BARICENTRICO A UNO QUALSIASI, ALTRIMENTI MUREI" MOMENTI STATICI NON NULLI.

ROTAZIONE SIST. DI RIFERIMENTO

$$[I^*] = [R][\bar{I}][R]^T \quad \text{dove} \quad [R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & +\cos\theta \end{bmatrix}$$

Ho un sistema centrato in G e non ruotato, per rappresentare le precedenti scritte



$$\begin{cases} \bar{I}^*_{xx} = \bar{I}_{xx}\cos^2\theta + \bar{I}_{yy}\sin^2\theta - 2\bar{I}_{xy}\sin\theta\cos\theta & \text{I} \\ \bar{I}^*_{yy} = \bar{I}_{xx}\sin^2\theta + \bar{I}_{yy}\cos^2\theta + 2\bar{I}_{xy}\sin\theta\cos\theta & \text{II} \\ \bar{I}^*_{xy} = \bar{I}_{xy}\cos 2\theta + \frac{1}{2}(\bar{I}_{xx} - \bar{I}_{yy})\sin 2\theta & * \end{cases}$$

* Sfruttando questa equazione, prendendo eguale a 0, posso ricavare l'unico speciale θ_0 che rende $\bar{I}^*_{xy} = 0$ e dunque mi permette di avere un SISTEMA PRINCIPALE D'INERZIA

$$Eq(*) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{1}{2}\arctg\left(\frac{2\bar{I}_{xy}}{\bar{I}_{yy} - \bar{I}_{xx}}\right) \qquad -\frac{\pi}{4} < \theta_0 < +\frac{\pi}{4}$$

$\theta_0 > 0$ VERSO ANTIORARIO

$\theta_0 < 0$ VERSO ORARIO

$\bar{I}^*_{xx}(\theta_0)$, $\bar{I}^*_{yy}(\theta_0)$ sono i massimi e i minimi $\forall \theta$.

(I+II) $\Rightarrow \bar{I}^*_{xx} + \bar{I}^*_{yy} = \bar{I}_{xx} + \bar{I}_{yy}$ Dunque la somma dei due tensori del momento d'inerzia è INVARIANTE con l'angolo θ.

$\bar{I}^*_{xx} + \bar{I}^*_{yy} = I_p$: MOMENTO D'INERZIA POLARE

SISTEMA CENTRALE = BARICENTRICO & PRINCIPALE

Master COPY COPISTERIA 050/831126 388/9837745