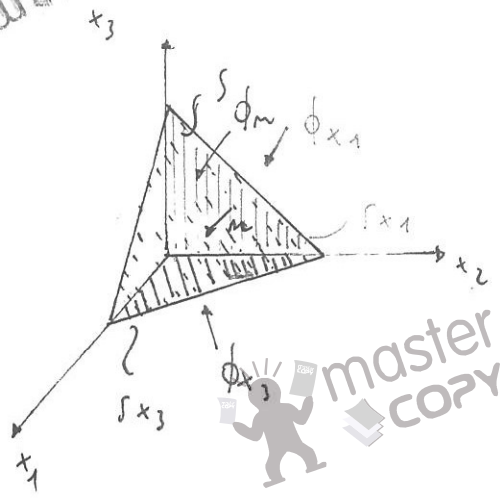
TEOREMA DI CAUCHY



- Volumetto di fluido di forma Tetraedrica
- n versore Normale a superficie S (diretto verso l'interno)
- Sforzo (Pressione) agente ortogonale alla superficie.

- $\rho \cdot F \cdot \Delta V - \rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \Delta V + \phi_n \cdot S + \phi_{x_1} \cdot S_{x_1} + \phi_{x_2} \cdot S_{x_2} + \phi_{x_3} \cdot S_{x_3} = 0$

  Volume — inerzia — Sforzi di superficie

* Utilizzo coseni direttori $\begin{cases} S_{x_1} = -l_1 \cdot S \\ S_{x_2} = -l_2 \cdot S \\ S_{x_3} = -l_3 \cdot S \end{cases}$

- $\frac{\rho \cdot F \cdot \Delta V}{S} - \frac{\rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \Delta V}{S} + \phi_n \cdot S - \phi_{x_1} \cdot l_1 \cdot S + \phi_{x_2} \cdot l_2 \cdot S + \phi_{x_3} \cdot l_3 \cdot S = 0$

* Eseguo $\lim_{\Delta V \to 0}$ ..... $= \phi_n - \phi_{x_1} l_1 - \phi_{x_2} \cdot l_2 - \phi_{x_3} \cdot l_3 = 0$

- $\phi_n = \phi_{x_1} \cdot l_1 + \phi_{x_2} \cdot l_2 + \phi_{x_3} \cdot l_3$

* Scompongo le proiezioni di ϕ_n lungo i 3 Assi:

- $\begin{cases} \phi_{n x_1} = \boxed{\phi_{x_1 x_1} \cdot l_1} + \phi_{x_2 x_1} \cdot l_2 + \phi_{x_3 x_1} \cdot l_3 = \phi_n \cdot l_1 \\ \phi_{n x_2} = \phi_{x_1 x_2} \cdot l_1 + \boxed{\phi_{x_2 x_2} \cdot l_2} + \phi_{x_3 x_2} \cdot l_3 = \phi_n \cdot l_2 \\ \phi_{n x_3} = \phi_{x_1 x_3} \cdot l_1 + \phi_{x_2 x_3} \cdot l_2 + \boxed{\phi_{x_3 x_3} \cdot l_3} = \phi_n \cdot l_3 \end{cases}$

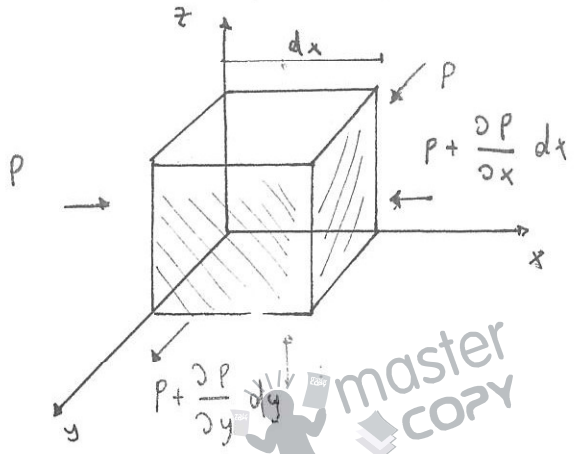
* Per un fluido in quiete gli sforzi di taglio sono Nulli ($\phi_{ij} = 0$ per $i \neq j$)

$$\boxed{\phi_n = \phi_{x_1 x_1} = \phi_{x_2 x_2} = \phi_{x_3 x_3} = P}$$ Pressione


master
COPY
COPISTERIA
master
COPY


master
COPY
COPISTERIA
master
COPY

EQUAZIONE INDEFINITA STATICA DEI FLUIDI



* Non c'è variazione di velocità (Forze di inerzia Nulle)

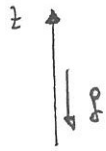
* Forze di massa Totali

$$\int F_x\, dx\, dy\, dz = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx - p\right) dy\, dz =$$
$$\int F_y\, dx\, dy\, dz = \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy - p\right) dx\, dz = \Rightarrow$$
$$\int F_z\, dx\, dy\, dz = \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz - p\right) dx\, dy =$$

$$\begin{cases} \int F_x = \dfrac{\partial p}{\partial x} dx \\ \int F_y = \dfrac{\partial p}{\partial y} dy \\ \int F_z = \dfrac{\partial p}{\partial z} dz \end{cases}$$

$$\boxed{\int \cdot F = \int \text{grad } p}$$

EQUAZIONE FONDAMENTALE IDROSTATICA



· Nel caso del campo gravitazionale

$F_z = -g \rightarrow \varphi = -g \cdot z + \text{cost}$ (Potenziale)

$F = \text{grad } \varphi$

$$\frac{\text{grad } p}{\int} = \text{grad } \varphi$$

$$\text{grad } p = \int \cdot \text{grad } \varphi$$

$$\text{grad } p = \int \cdot \left(-g\, \text{grad } z\right)$$

$$\text{grad } p = -\gamma \cdot \text{grad } z$$

$$-\text{grad } z = \text{grad } \frac{p}{\gamma}$$

$$\text{grad}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{p}{\gamma} + z = \text{cost.}}$$

master COPY
master COPY COPISTERIA
master COPY

EQUAZIONE GLOBALE EQUILIBRIO STATICO

$\rho \cdot F$ = prod P condizione locale, W volume del fluido

$$\int_W \rho \cdot F \, dw = \int_W \text{prod } P \, dw$$

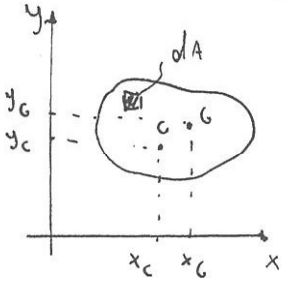
$$\int_W \rho \cdot F \, dw + \int_A P \cdot n \, dA = 0$$

Risultante Forze di Massa — Risultante Forze di superficie

Peso G del Volume W — Spinta Π che superficie A esercita su Volume W

$$\boxed{G + \Pi = 0}$$

SPINTA SU SUPERFICI PIANE ORIZZONTALI



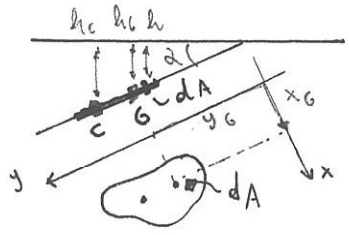
$$S = P \cdot A = \int_A p \, dA \rightarrow S x_c = \int p x \, dA \;,\; S \cdot y_c = \int p \cdot y \, dA$$

Spinta $\boxed{x_c} = \dfrac{\int p \cdot x \, dA}{S} = \dfrac{\int p \cdot x \, dA}{p \cdot A} = \dfrac{p \int x \, dA}{p \cdot A} = \dfrac{p x_G \cdot A}{p \cdot A} = \boxed{x_G}$

$\boxed{y_c} = \dfrac{\int p \cdot y \, dA}{S} = \dfrac{\int p \cdot y \, dA}{p \cdot A} = \dfrac{p \int y \, dA}{p \cdot A} = \dfrac{p y_c \cdot A}{p \cdot A} = \boxed{y_G}$

P, γ, α costanti:

SPINTA SU SUPERFICI PIANE INCLINATE



$$dS = \gamma \cdot h \cdot dA \rightarrow S = \int_A \gamma h \cdot dA = \gamma \cdot h_G \cdot A = \gamma \cdot y_c \cdot \sin\alpha \cdot A$$

$$S \cdot y_c = \int_A \gamma \cdot h \cdot y \, dA = \gamma \int_A y^2 \cdot \sin\alpha \cdot dA = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_{xx}$$

$$S \cdot x_c = \int_A \gamma \cdot h \cdot x \, dA = \gamma \int_A x \cdot y \sin\alpha \, dA = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_{xy}$$

I_{xx} = Momento di inerzia rispetto asse x

I_{xy} = " " " x e y

$$\boxed{y_c} = \frac{\gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_{xx}}{S} = \frac{\gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_{xx}}{\gamma \cdot \sin\alpha \cdot y_G \cdot A} = \frac{I_{xx}}{y_G \cdot A} = \frac{I_{x_G x_G} + A \cdot y_G^2}{y_G \cdot A} = \boxed{\frac{I_{x_G x_G}}{y_G \cdot A} + y_G}$$

$$\boxed{x_c} = \frac{\gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_{xy}}{S} = \frac{\gamma \cdot \sin\alpha \cdot I_{xy}}{\gamma \cdot \sin\alpha \cdot y_G \cdot A} = \frac{I_{xy}}{y_G \cdot A} = \frac{I_{x_G y_G} + A \cdot x_G \cdot y_G}{y_G \cdot A} = \boxed{\frac{I_{x_G y_G}}{y_G \cdot A} + x_G}$$