IDRAULICA

- 6 CFU (132HH) -

Teoria

+

esercizi svolti

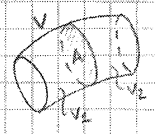
Prof. M. Palermo / S. Pagliara

master COPY COPISTERIA 050/8312126 368/9837745

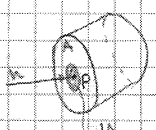
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 368 9837745

SFORZI NEI SISTEMI CONTINUI

Forze di massa + forze superficiali



volume V di fluido in equilibrio sotto le forze che agiscono, dividendolo in 2 parti V_1 e V_2, entrambe saranno in equilibrio se applichiamo sulla superficie di separazione A gli sforzi che la parte separata applicava sull'altra.



$d\Pi$ = risultante degli sforzi che attraversa dA

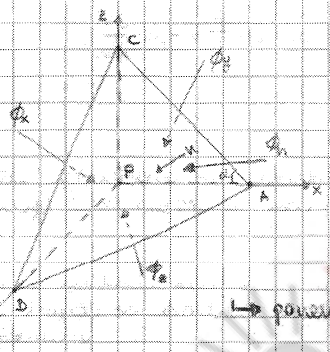
$\lim_{dA \to 0} \frac{d\Pi}{dA} = \phi$ (vettore) = SFORZO UNITARIO nel punto P $\rightsquigarrow d\Pi = \phi \, dA$

Gli sforzi variano da punto a punto e anche in dipendenza dall'orientamento di dA, quindi si fa riferimento al versore normale n all'elemento dA $\rightsquigarrow \phi \to \phi_n$:

$d\Pi = \phi_n \cdot dA$ $\rightsquigarrow$ SPINTA ELEMENTARE

$\Pi = \int_A \phi_n \cdot dA$ $\rightsquigarrow$ SPINTA totale sulla superficie A

variazione dello sforzo in un punto al variare della giacitura (in dipendenza da n):



Il versore normale si forma con le direzioni dei 3 assi coordinati gli angoli $\hat{nx}$, $\hat{ny}$, $\hat{nz}$

$ABC \perp n$: $\phi_n \cdot A_{ABC}$ (dato, area ABC)

$PCB \perp x$: $-\phi_x \cdot A \cos \hat{nx}$ (area) $A_x = A \cos\alpha$ con $\alpha = 180° - \hat{nx}$, $\cos(180° - \hat{nx}) = -\cos \hat{nx}$

$PAC \perp y$: $-\phi_y A \cos \hat{ny}$

$PAB \perp z$: $-\phi_z A \cos \hat{nz}$

↳ ponendo l'equilibrio $\rightsquigarrow \phi_n = \phi_x \cos \hat{nx} + \phi_y \cos \hat{ny} + \phi_z \cos \hat{nz}$ → TEOREMA DEL TETRAEDRO DI CAUCHY

"lo sforzo che agisce su un elemento superficiale di normale n è una funzione lineare e omogenea degli sforzi che agiscono nello stesso punto sui 3 elementi superficiali tra loro ortogonali"

↳ proiettiamo ϕ_n sui 3 assi x,y,z per ottenere le relazioni scalari:

$$\begin{cases} \phi_{nx} = \phi_{xx} \cos \hat{nx} + \phi_{yx} \cos \hat{ny} + \phi_{zx} \cos \hat{nz} \\ \phi_{ny} = \phi_{xy} \cos \hat{nx} + \phi_{yy} \cos \hat{ny} + \phi_{zy} \cos \hat{nz} \\ \phi_{nz} = \phi_{xz} \cos \hat{nx} + \phi_{yz} \cos \hat{ny} + \phi_{zz} \cos \hat{nz} \end{cases}$$

ϕ_{nx} = proiezione di ϕ_n secondo l'asse x, lo stesso vale per le altre componenti

ci sono 9 componenti di sforzo, che collochiamo nel TENSORE DEGLI SFORZI:

$$\begin{vmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \phi_{xz} \\ \phi_{yx} & \phi_{yy} & \phi_{yz} \\ \phi_{zx} & \phi_{zy} & \phi_{zz} \end{vmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ scrivendo le 3 equazioni di equilibrio alla rotazione rispetto ai 3 assi cartesiani del tetraedro, ottengo:

$\phi_{xy} = \phi_{yx}$, $\phi_{xz} = \phi_{zx}$, $\phi_{yz} = \phi_{zy}$ → componenti tangenziali

↳ ho quindi 6 componenti distinte:

- 3 componenti NORMALI σ_x, σ_y, σ_z (al posto di ϕ_{xx}, ϕ_{yy}, ϕ_{zz})
- 3 componenti TANGENZIALI τ_x, τ_y, τ_z (al posto delle coppie $\phi_{xy} = \phi_{yx}$, ...)

diventa

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{vmatrix} = \text{TENSORE DEGLI SFORZI}$$

PIANI PRINCIPALI = piani su cui $\tau = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ = pressione nel punto

TENSORE ISOTROPO o IDROSTATICO →

$$\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \rightsquigarrow \phi_n = p \, n$$

STATICA DEI FLUIDI

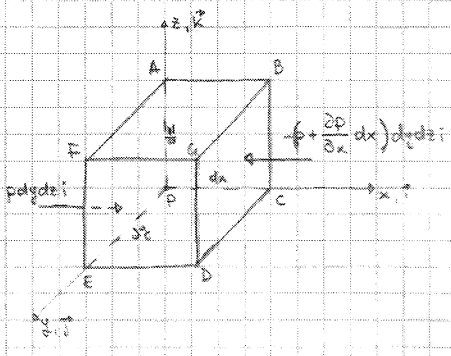
nella statica gli sforzi sono solo normali σ_n e non tangenziali, che sono nulli.

$\tau = -\mu \frac{dv}{dn}$ se la velocità è nulla $\rightarrow dv = 0 \rightarrow \tau = 0$ $\quad \tau_x, \tau_y, \tau_z = 0$ se $\begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}$ TENSORE IDROSTATICO
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = p$

se gli sforzi ammettono soltanto componenti normali, indicata con σ_n la componente normale dello sforzo σ_n agente sull'elemento di normale n, ricaviamo:

$\left.\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_n \cos \hat{nx} = \sigma_x \cos \hat{nx} \\ \sigma_{ny} &= \sigma_n \cos \hat{ny} = \sigma_y \cos \hat{ny} \\ \sigma_{nz} &= \sigma_n \cos \hat{nz} = \sigma_z \cos \hat{nz} \end{aligned}\right\} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_n \rightarrow$ la pressione p nel generico punto di una massa fluida in quiete è il modulo dello sforzo nel punto stesso

EQUAZIONE INDEFINITA



dobbiamo valutare l'equilibrio nell'intorno del punto, sull'elemento infinitesimo di volume agiscono:

- FORZA DI MASSA complessiva: $\rho F\, dx dy dz$ (densità ρ forza di massa per unità di massa)
- FORZE SUPERFICIALI:

$\left.\begin{aligned} &APEF \perp x: \ p\, dy dz\, i \\ &DCDG \perp x: \ -\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz\, i \\ &\rightarrow p\, dy dz\, i - p\, dy dz\, i - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz\, i = 0 \end{aligned}\right\}$ stesso ragionamento per le facce $\perp y$ e $\perp z$.

↳ le risultanti delle spinte sulle due facce parallele e normali agli assi x, y, z sono:

$\perp x: \ -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz\, i$

$\perp y: \ -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz\, j$

$\perp z: \ -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz\, k$

$\rightarrow$ facendo l'equilibrio tra forze interne ed esterne:

$$\rho F\, dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz\, i - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz\, j - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz\, k = 0 \rightarrow \rho F = \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\rho F = \text{grad}\, p}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO STATICO

Considero un volume finito di fluido, opportunamente definito in modo che una parte della sua superficie di contorno coincida con quella per la quale si vuole valutare la spinta.
W = volume
A = superficie di contorno

$\rightarrow$ ottengo l'eq. globale integrando l'eq. indefinita nel volume:

$$\int_W \rho F\, dW = \int_W \text{grad}\, p\, dW$$

- $\int_W \rho F\, dW = G \rightarrow$ risultante delle singole forze di massa del fluido nel volume W (peso del volume W).
- $\int_W \text{grad}\, p\, dW = \int_W \left(\frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k\right) dW \rightarrow$ applico la formula di trasformazione da integrali di volume a integrali di superficie $\rightarrow$

$\rightarrow -\int_A p\,(i \cos \hat{nx} + j \cos \hat{ny} + k \cos \hat{nz})\, dA = -\int_A p\, \vec{n}\, dA = \Pi \rightarrow$ risultante delle spinte elementari su tutta la superficie di contorno (spinta Π che la superficie A esercita sul volume W).
(pensa: n è verso l'interno del volume)

↳ $\boxed{G + \Pi = 0}$ la risultante delle forze di massa agenti sopra un generico volume di un fluido in quiete è uguale ed opposta alla spinta agente (dall'esterno verso l'interno) sulla superficie di contorno A che lo delimita

COMPRIMIBILITA'

V = volume di fluido p = pressione che agisce su V

$$dV = -\frac{V}{\varepsilon} dp$$

→ dV = DIMINUZIONE DI VOLUME

→ ε = MODULO DI ELASTICITA' o COMPRESSIONE CUBICA = $dp/(\frac{dV}{V})$, $\varepsilon_{H_2O} = 2{,}03 \cdot 10^9$ kg/m²

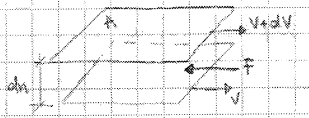
→ dp = INCREMENTO DI PRESSIONE

considerando che la massa = $\rho \cdot V$ = costante ne differenziando → $\rho dV + V d\rho = 0$ → $dV = -\frac{V}{\rho} \cdot d\rho$ →

→ quindi ne $-\frac{V}{\rho} \cdot d\rho = -\frac{V}{\varepsilon} d\rho \rightarrow \frac{d\rho}{\varepsilon} = \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow d\rho = \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot d\rho$

Lo per H_2O $d\rho = \frac{\rho}{\varepsilon} \cdot d\rho = 0$ → ρ = costante → l'H_2O è incomprimibile

VISCOSITA' o ATTRITO INTERNO

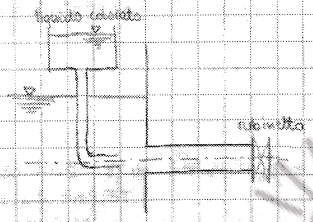


due strati paralleli che si muovono a velocità diverse, nasce una forza:

$$F = -\mu \cdot A \cdot \frac{dv}{dn}$$ ne esplicitando lo SFORZO TANGENZIALE ne $\tau = \frac{F}{A} = -\mu \cdot \frac{dv}{dn}$

(μ = VISCOSITA', dv = velocità)

REGIMI DI MOVIMENTO



Recipiente pieno d'acqua con un condotto ad una certa altezza; viene immesso un liquido colorato con lo stesso peso specifico dell'acqua

- appena si apre il rubinetto, l'acqua esce con calma e il liquido colorato segue un percorso rettilineo ne REGIME LAMINARE o LINEARE
- se si apre un po' di più, il liquido comincia ad oscillare ne FASE DI TRANSIZIONE
- se si apre completamente, il getto di liquido colorato si mescola con tutta la massa fluida e non si può più distinguere ne MOTO DI TRASPORTO + MOTO DI AGITAZIONE (turbolento)

REGIME TURBOLENTO

www.ingstef.com Cagliari 050/831123 - 339/1987740

EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA STATICA DEI FLUIDI PESANTI E INCOMPRIMIBILI (legge di Stevin)

Consideriamo un fluido in quiete soggetto unicamente all'azione del campo gravitazionale

↳ in generale possiamo dire: $\underset{\text{forza di massa}}{F} = -\underset{\text{accelerazione di gravità}}{g}\ \text{grad}\ \underset{\text{quota geodetica}}{z}$ — peso specifico γ

↳ sostituendola nell'eq. indefinita $\rho F = \text{grad}\, p \rightarrow -\rho g\, \text{grad}\, z = \text{grad}\, p \rightarrow -\gamma\, \text{grad}\, z = \text{grad}\, p$

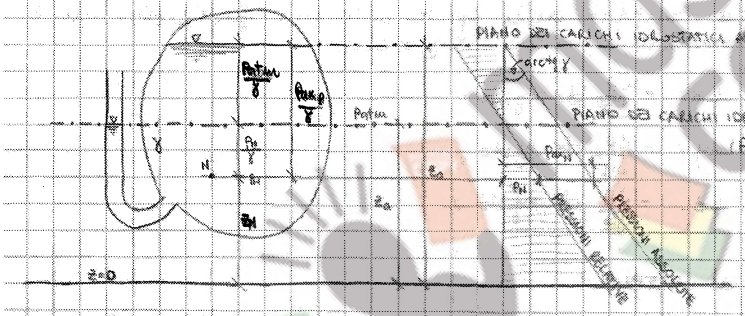
↳ per l'ipotesi di incomprimibilità $\rho = \text{cost}$ quindi $\gamma = \text{cost} \rightarrow -\text{grad}\, z = \frac{1}{\gamma}\text{grad}\, p \rightarrow$

$$\rightarrow \text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0 \rightarrow \boxed{z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost}}$$

z: QUOTA GEODETICA del punto; $\frac{p}{\gamma}$: ALTEZZA PIEZOMETRICA; $z + \frac{p}{\gamma}$: QUOTA PIEZOMETRICA

a tutti i punti di un fluido pesante incomprimibile in quiete compete la stessa quota piezometrica

$$p_2 = p_A + \gamma (z_A - z_B)$$



$z_0 = z_N + \frac{p_{aN} - p_{atm}}{\gamma}$ ↳ PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI

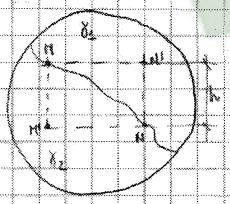
$z_0 = z_N + \frac{p_{aN}}{\gamma}$ ↳ PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO

$z_0 - z = \frac{p_{atm}}{\gamma}$

$p' = p_{ax} - p_{atm}$ (PRESSIONE RELATIVA)

$p_{ax} = \gamma(z_0 - z) = \gamma h_{ax}$

$p = \gamma(z_0 - z) = \gamma h$

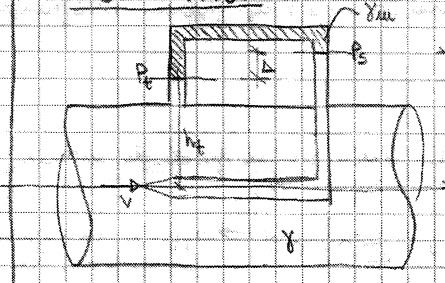


$p_M = p_{M'} + \gamma_2 h$

$p_N = p_{N'} + \gamma_2 h \rightarrow p_N + \gamma_2 h = p_M + \gamma_2 h$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

TUBO di PITOT



$p_t - p_s = \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma$

$h_s - h_t = \Delta$

$p_s + h_s \cdot \gamma = p_t + h_t \cdot \gamma + \Delta \gamma_m \rightarrow$

$\rightarrow \frac{v^2}{2g} \cdot \gamma = h_s \cdot \gamma - h_t \cdot \gamma + \Delta \gamma_m \rightarrow$

$\rightarrow \frac{v^2}{2g} = \Delta \cdot \left(\frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}\right)$