ESERCIZI PALLOTTINO:

PUNTI DI EQUILIBRIO

ESAME 14/01/2021:

ES.1:

$$T.C.: \begin{cases} \dot{X}_1 = -2X_1 - 4X_2^3 + aX_2^2 + u \\ \dot{X}_2 = (\gamma+1)X_1 \end{cases}$$

1- DETERMINARE GLI EQUILIBRI DEL SISTEMA, AL VARIARE DI a? CON $u = 0$. STUDIARE STABILITÀ CON IL METODO INDIRETTO:

$u = 0$:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = 0 = -2X_1 - 4X_2^3 + aX_2^2 \rightarrow X_2^2(a - 4X_2) = 2X_1 \\ \dot{X}_2 = 0 = (\gamma+1)X_1 \rightarrow X_1 = 0 \end{cases}$$

$$X_2^2(a-4X_2) = 0 \rightarrow \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_2 = \frac{a}{4} \end{cases}$$

$\left(0,0\right), \left(0, \frac{a}{4}\right)$ ⇒ PUNTI DI EQUILIBRIO

APPLICO IL METODO INDIRETTO:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{X}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{X}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \dot{X}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{X}_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12X_2^2 + 2aX_2 \\ \gamma+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$:

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \gamma+1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad DET(A) = 0$$

$$Tr(A) = -2 \longrightarrow \lambda_1 = -2$$

$$\longrightarrow \lambda_2 = 0 \rightarrow \text{NON POSSO CONCLUDERE!}$$

NON POSSO CONCLUDERE CON IL METODO INDIRETTO SULLA STABILITÀ DELL'ORIGINE!

master COPY

$\left(0, \frac{a}{4}\right)$:

$$A_{\left(0,\frac{a}{4}\right)} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2}{16} + 2a\cdot\frac{a}{4} \\ \gamma+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{a^2}{4} \\ \gamma+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$DET(A) = -(\gamma+1)\left(-\frac{3}{4}a^2 + \frac{2}{4}a^2\right) = \frac{1}{4}a^2(\gamma+1) > 0 \rightarrow \lambda_1 \text{ E } \lambda_2 \text{ SONO } <0 \text{ O } >0 \text{ ENTRAMBI}$$

$Tr(A) = -2 < 0 \rightarrow$ GLI AUTOVALORI SONO ENTRAMBI <0!

$$DET(-A + \lambda I) = DET\begin{pmatrix} \lambda+2 & \frac{a^2}{4} \\ -\gamma-1 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + (\gamma+1)\frac{a^2}{4} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - (\gamma+1)\frac{1}{4}a^2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-(\gamma+1)a^2}}{2} = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-(\gamma+1)a^2}$$

master COPY

È SEMPRE <0 PER OGNI $a \in \mathbb{R}$ IN QUANTO $Re(\lambda) = -1 < 0$

QUINDI:

LA PARTE $Re(\lambda_1) < 0$, $Re(\lambda_2) < 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$

QUINDI IL PUNTO DI EQUILIBRIO $\left(0, \frac{a}{4}\right)$ NEL SISTEMA NON LINEARE È UN PUNTO LOCALMENTE ASINTOTICAMENTE STABILE

2- u? IN FUNZ. DI α CHE RENDA L'ORIGINE UN PUNTO A.S., EVENTUALMENTE DETERMINANDO LA CANDIDATA DI LYAPUNOV CHE NE PROVI LA STABILITÀ ASINTOTICA:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2^3 + \alpha x_2^2 + u \\ \dot{x}_2 = (\gamma+1)x_1 \end{cases}$$

master COPY

1° MODO:

PRENDO: $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$

PER VEDERE DI STABILIZZARE IL PUNTO NELL'ORIGINE! DEVO COMUNQUE RISPETTARE IL VINCOLO SUL PUNTO DI EQUILIBRIO, O VERO USANDO L'INGRESSO SCELTO, IL PUNTO $(0,0)$ DEVE ESSERE SEMPRE UN PUNTO DI EQUILIBRIO.

SE PONGO: $(0,0) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow u = 0$ ok!

VADO A FARE IL LINEARIZZATO CON LA u SCELTA:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 4x_2^3 + \alpha x_2^2 + k_1 x_1 + k_2 x_2 \\ \dot{x}_2 = (\gamma+1)x_1 \end{cases}$$

master COPY

$$A = \begin{pmatrix} -2+k_1 & -4x_2^2 + 2\alpha x_2 + k_2 \\ \gamma+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(\underline{0,0})$:

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2+K_1 & K_2 \\ \gamma+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{DET}(\lambda I - A) = \text{DET}\begin{pmatrix} \lambda+2-K_1 & -K_2 \\ -(\gamma+1) & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+2-K_1) - K_2(\gamma+1)$$

$$= \lambda^2 + \lambda(2-K_1) - K_2(\gamma+1)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{(2-K_1) \pm \sqrt{(2-K_1)^2 + 4K_2(\gamma+1)}}{2} =$$

NO CHE: $2-K_1 > 0 \Rightarrow K_1 < 2$

$(2-K_1)^2 + 4K_2(\gamma+1) = 0 \Rightarrow$ PONGO $K_1 < 2$.

$4K(\gamma+1) = -1 \Rightarrow K_2 = -\frac{(2-K_1)^2}{4\cdot(\gamma+1)} < 0$

SE: $\boxed{\begin{matrix} K_1 < 2 \\ K_2 < 0 \end{matrix}}$ IL SISTEMA É A.S.

IO POSSO VERIFICARE CON:

$\text{DET}(A) = -K_2(\gamma+1) < 0 \Rightarrow \boxed{K_2 < 0}$

$\text{tr}(A) = -2+K_1 < 0 \Rightarrow \boxed{K_1 < 2}$

(IN MODO CHE DET >0 IN MODO CHE ENTRAMBI $\lambda_1/\lambda_2 < 0$)

2° MODO:

$$V = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{4} x_2^4$$

AFFINCHÉ IL SISTEMA SIA A.S.

$$\dot{V} = \frac{dV}{dx_1} \dot{x}_1 + \frac{dV}{dx_2} \dot{x}_2 = x_1 \cdot (-2x_1 - 4x_2^3 + a x_2^2 + w) + x_2^3 \cdot (\gamma+1) x_1 < 0$$

$$= -2x_1^2 - 4x_1 x_2^3 + a x_2^2 x_1 + w x_1 + x_2^3 (\gamma+1) x_1 \overset{\gamma=3}{=} -2x_1^2 + a x_2^2 x_1 + w x_1 =$$

$$= -x_1 (2x_1 + a x_2^2 + w) < 0 \qquad w = -a x_2^2$$

$$\dot{V} = -2x_1^2 \leq 0$$

$$2x_1 + a x_2^2 + w > 0$$

SEMI - DEF. NEGATIVA

SE $x_1 > 0 \Rightarrow -x_1 < 0$

$\boxed{w = -a x_2^2} \Rightarrow x_1 > 0$

POSSO CONCLUDERE SULLA LOCALE STABILITÁ

N.B: $\dot{V} = -2x_1^2 \leq 0 \Rightarrow$ POSSO GENERALIZZARLA:

$$\{ \dot{V} = 0 \} = \{ (0, x_2) \text{ t.c: } x_2 \in \mathbb{R} \}$$

ORA UTILIZZO IL TEOREMA DI LASALLE - KRASOWSKIJ:

SIA $V > 0$ DEF. POSITIVA E $\dot{V} \leq 0$ SEMI - DEF. NEG. ALLORA IL SISTEMA HA UN'UNICA TRAIETTORIA CHE É CONTENUTA NELL' INSIEME DI PUNTI $(0, x_2)$ CHE RENDE L'ORIGINE UN PUNTO DI A.S.