Teoria dei Sistemi e del Controllo - 22-07-2019

1. Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = e^{x_2(t)} - (1 - 3u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \sin(x_1(t) + x_2(t)) + 2u^2(t) \end{cases}$$

   - si determino gli equilibri del sistema nel caso $u(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e se ne studi la stabilità.
   - Per gli equilibri asintoticamente stabili si determini una candidata di Lyapunov.
   - Per gli equilibri instabili si determini, se esiste, una retroazione dello stato che li renda asintoticamente stabili.

2. Dato il sistema lineare rappresentato dalla matrice di trasferimento

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & -\frac{1}{s(s+1)} \end{pmatrix}$$

   - Determinare il grado di McMillan della matrice di trasferimento.
   - Calcolare la forma di stato del sistema lavorando per righe. Commentare, senza fare conti sulle proprietà di raggiungibilità e osservabilità del sistema ottenuto.
   - Considerando il sistema in forma di stato con il solo secondo ingresso e la sola prima uscita, si commentino le proprietà di osservabilità e di raggiungibilità del sistema. In seguito, si determinino le dimensioni e le basi degli spazi di inosservaiblità e di raggiungibilità del sistema.

3. Sia dato il sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 - 3 & 0 \\ 1 & -2 & \alpha^2 + 3\alpha \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

   si determini :

   - i valori di α per i quali esiste un osservatore asintotico dello stato;
   - i valori di α per i quali il sistema è stabilizzabile tramite retroazione dinamica dell'uscita;
   - i valori del parametro α per i quali e' possibile strabilizzare il sistema tramite retroazione dinamica dell'uscita ponendo tutti gli autovalori in -2
   - scelto un valore per α che soddisfi le condizioni trovate al punto precedente, trovare le espressioni di stimatore e controllore relativi al punto precedente.

4. Il candidato enunci e dimostri il principio noto con il nome "Principio di separazione".

master COPY

master COPY

master COPY

master COPY

1) $\begin{cases} 0 = e^{x_2} - 1 \\ 0 = \sin(x_1 + x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_2} = 1 \longrightarrow x_2 = 0 \\ \sin x_1 = 0 \longrightarrow x_1 = k\pi \end{cases}$ EQ. $(k\pi \quad 0)$

i) LINEARIZZIANDO IL SISTEMA

$$A = \begin{vmatrix} 0 & e^{x_2} \\ \cos(x_1+x_2) & \cos(x_1+x_2) \end{vmatrix}$$

DISTINGUIAMO I CASI DI K PARI E K DISPARI:

K PARI:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

PER LA REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO HO 2 RADICI POSITIVE

PER IL METODO INDIRETTO, L'EQUILIBRIO È INSTABILE.

K DISPARI:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$$

PER LA REGOLA DI CARTESIO HO 2 RADICI NEGATIVE

PER IL METODO INDIRETTO DI LYAPUNOV, L'EQUILIBRIO È AS. STAB.

b) PER IL CASO K DISPARI CONSIDERIAMO:

$$V = x^{tr} \cdot P \cdot x$$

DOVE P È UNA MATRICE SIMMETRICA P.D CHE SODDISFA L'EQUAZIONE DI LYAPUNOV:

$$P \cdot A + A^{tr} \cdot P = -Q$$

DOVE PER Q ASSUMIAMO: $Q = I$, QUINDI:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -b & -c \\ a-b & b-c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & a-b \\ -c & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2b & a-b-c \\ a-b-c & 2(b-c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

DA CUI

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \longrightarrow a = b + c = 1/2 + 1 = 3/2 \\ -2b = -1 \longrightarrow b = 1/2 \\ 2(b-c) = -1 \longrightarrow 1 - 2c = -1 \longrightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow P = \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix}$$

DA CUI

$$V(x) = x^{tr} \cdot P \cdot x = \frac{3}{2} x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

c) $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} -3 \\ 4u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix}$

VERIFICHIAMO LA RAGGIUNGIBILITÀ DEL SISTEMA:

$R = \begin{vmatrix} -3 & 4u \\ 4u & -3+4u \end{vmatrix}$ CONDIZ. RAGG. NELL'EQUILIBRIO $\rightarrow R = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$

QUINDI

$$(A+Bk) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3k_1 & 1-3k_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

PONIAMO I POLI IN -1:

$$p_d(\lambda) = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

$$p(\lambda) = (\lambda+3k_1)(\lambda-1) - (1-3k_2)$$

$$= \lambda^2 + 3k_1\lambda - \lambda - 3k_1 - 1 + 3k_2$$

$$= \lambda^2 + \lambda(3k_1 - 1) + (3k_2 - 1 - 3k_1)$$

DA CUI:

$3k_1 - 1 = 2 \Longrightarrow k_1 = 1$

$3k_2 + 1 - 3k_1 = 1 \Longrightarrow 3k_2 = 5 \Longrightarrow k_2 = 5/3$

$\Longrightarrow k = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \end{pmatrix}$

---

(2) $$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{vmatrix} s+1 & 5 \\ 0 & s+1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$D_0 = 1$

$D_1 = M.C.D.\{s+1,\ 5,\ s+1,\ -1\} = 1$

$D_2 = M.C.D.\{(s+1)^2,\ -(s+1)\} = (s+1)$

$$\lambda_1 = \frac{D_1}{D_0} = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{D_2}{D_1} = s+1$$

DA CUI

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IL GRADO DI Mc MILLAN È PARI A 3

b) Considerando le singole righe

$$G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} (s+1) & s \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vediamo che abbiamo ottenuto un sistema di ordine 5, ma siccome il grado di $Mc\,Mi$ lan ottenuto è 3, deduciamo che NON avremo un sistema compl. ragg. e osservabile.

c) Considerando ora

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siccome gli autovalori di A sono:

$\lambda_1 = 0 \quad (m.\theta = 2) \qquad \lambda_2 = -1 \quad (m.\theta = 2) \qquad \lambda_3 = 1$

per il lemma PBH, affinché il sistema sia compl. ragg. e oss. avrei bisogno di 2 ingressi e 2 uscite.

Calcoliamo le dimensioni di $\mathcal{R}$ e $\bar{\mathcal{O}}$:

$$R = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \end{array} \right| \cdots \qquad \text{rank}(R) = 3 \Rightarrow \mathcal{R} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{O} = \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \cdots \qquad \text{rank}(\mathcal{O}) = 2 \Rightarrow \bar{\mathcal{O}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$