TEORIA DEI SISTEMI

Lezione 01 docente = Luca Pallottino

1° modulo } teoria dei sistemi (materia annuale)
2° modulo }

libri: E. Fornasini, G. Marchesini: "Esercizi di Teoria dei sistemi", ed. Libreria Progetto (Padova) (Esercizi con soluzioni)

oss: sono presenti 2 prove in itinere (una a novembre e una a dicembre)

sito ufficiale del corso → su Moodle oppure su Teams (c'è link pubblico)

Ricevimento ⇒ possibilmente lunedì pomeriggio

oss: 6-7 ottobre il docente non c'è → recupero di lunedì (o martedì o pomeriggio)

lunedì 8.45 - 10.15 } esposizione delle lezioni
giovedì 8.45 - 11.30 }

Problema di controllo = imporre un comportamento desiderato ad un sistema.

Esempio = controllo di velocità di un autoveicolo.

variabile di riferimento → esempio: andamento velocità di un autoveicolo

Relazione causa → effetto → esempio: (acceleratore sul pieno) → (cambio andamento della velocità)

sistema = quello da cui dà relazione tra ingresso e uscita.

ci sono presenti dei "disturbi" come per esempio vento, pendenza strada, ecc...

FeedBack → sensori con cui misuriamo la variabile di riferimento affinché coincida con la variabile desiderata.

Lezione 02

Consideriamo la seguente matrice

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ quali sono gli autovalori → $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$ (matrice diagonale)

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ quali sono gli autovalori → $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ (matrice triangolare superiore)

3) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ (matrice triangolare a blocchi) autovalori sui blocchi della diagonale principale

$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 0$

4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcolare l'autovettore associato a $\lambda = 0$

$Av = \lambda v$ con $v \neq \bar{0}$ quindi $v = (0, 0, 1)$

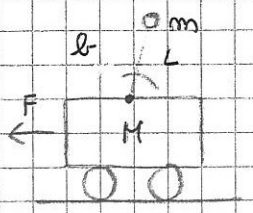
$Av = 0 \rightarrow v \in Ker(A)$ (definizione di Nucleo)

Posso vederlo anche così

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} v_3 = \underline{\varnothing}$$

→ posso vederlo come combinazione lineare

Supponiamo di avere il seguente sistema (senza attrito) un attrito tra carrello e asta
unto + pavimento



- come posso fare muovere la massa m?
- che Forza devo imprimere affinché l'asta con la massa sia ferma in una determinata posizione?

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + mL\cos\theta\,\ddot{\theta} - mL\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = F \\ mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta + mL\cos\theta\,\ddot{x} + b\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

θ = posizione verticale con angolo
x = posizione del baricentro

(è non lineare perché θ compare nel coseno e seno e perché la derivata di θ è al quadrato)

$x(t)$, $\theta(t)$

oss: non posso fare la trasformata di Laplace di un sistema non lineare

Devo linearizzare il sistema

Se θ è piccolo mi posso chiedere come varia il sistema → se posso trascurarlo elimino i termini che mi danno la non linearità

$\sin\theta \approx \theta$
$\cos\theta \approx 1$
$\theta \cdot \dot{\theta}^2$ → in prima approssimazione potrei trascurarlo

} rischio di ottenere un problema troppo differente da quello di partenza

Posso chiedermi se ci sono dei punti di equilibrio nel sistema?

Questi quesiti li vedremo più avanti...

Modelli ed esempi di sistema

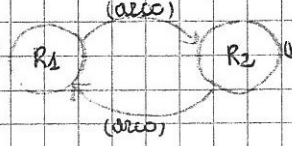
1) Modello di trasferimento di risorse: o oggetti di interesse RISORSE (umani, beni, servizi)
↓
sono caratterizzate da una certa QUALITÀ (colore, dimensione, forma)

oss: i singoli elementi della risorsa sono INDISTINGUIBILI

Se il sistema evolve senza poter intervenire dall'esterno (mission impressa) → SISTEMA ISOLATO

oss: questo è un sistema DINAMICO

Rappresentazione di questo modello attraverso grafo:



NODI = comportamenti
ARCHI = trasferimento di risorse, ovvero hanno cambiato qualità

Le risorse R_1 possono diventare risorse R_2 e viceversa...

Modello flusso continuo

$$\dot{x}_i(t) = \frac{d x_i(t)}{dt} = f_i^{IN}(t) - f_i^{usc}(t)$$

(qui indica come cambia la quantità)

Esempio: rete di distribuzione dell'acqua

- compartimento = serbatoio
- risorsa = liquido

x_i = volume liquido

$\dot{x}_1(t) = u_1(t) - f_1^{usc}(t)$

($u_1(t)$: ingresso acqua nel serbatoio; $f_1^{usc}(t)$: uscita acqua dal serbatoio)

Questo è un esempio di flusso continuo nel tempo

2) Modello di trasizione tra stati

aspetto di interesse: presenza o assenza di qualità

la modifica della qualità comporta una transizione che è di carattere probabilistico

oss: k = istante di tempo

Anche questi si modellano attraverso grafi.

Lezione 03

Sistema dinamico

- $\mathbb{T}$ = insieme dei tempi ($\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$) → gruppo additivo e ordinato — l'ipotesi fondamentale è che sia un insieme ordinato: posso definire quale è il prima e quale è il dopo.
- U = insieme dei valori di ingresso: va bene anche che sia un insieme finito (vedi esempio monete nella macchina del caffè)
- $\mathcal{U}$ = insieme delle funzioni di ingresso: $\mathcal{U}: \mathbb{T} \to U$ — la difficoltà di questo corso è che questo sarà uno spazio a dimensione infinita.
- Y = insieme dei valori in uscita
- $\mathcal{Y}$ = insieme delle funzioni in uscita: $\mathcal{Y}: \mathbb{T} \to Y$ — anche questo insieme sarà di dimensione infinita
- X = insieme degli stati: sono quelli che evolvono nel tempo e ci permettono di capire il sistema dinamico

Vediamo le IPOTESI

A) $\mathcal{U}$: 1° ipotesi: è inferiormente limitato

$\forall u \in \mathcal{U}\ \exists t_0 \in \mathbb{T}$ t.c. u non è definita per $t < t_0$ (vale se insieme è ordinato)

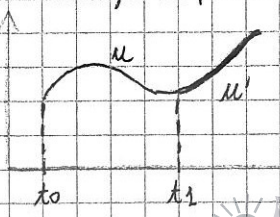
L'evoluzione del sistema dinamico parte da un istante finito.

2° ipotesi: troncamento di u in $\mathcal{U}$ è in $\mathcal{U}$

$\forall u \in \mathcal{U}$, definita a partire da t_0, allora $u'(t) \begin{cases} u(t) & t \geq t_1 \\ \text{non definite} & t < t_1 \end{cases}$ $(t_1 > t_0)$

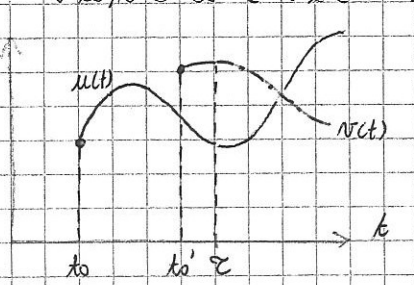
$u' \in \mathcal{U}$

Se una funzione parte ed è definita da t_0 in poi, allora se la tronco da t_1 in poi, ottengo sempre una funzione appartenente a $\mathcal{U}$.



3° ipotesi: chiuso per concatenazione

$\forall u, v \in \mathcal{U}$ e $\forall t \in \Pi$ $\exists w \in \mathcal{U}$ t.c $w(t) = \begin{cases} u(\tau) & t < \tau \text{ —} \\ v(\tau) & t \geq \tau \text{ - -} \end{cases}$



B) $\underline{\underline{X}}$ definiamo $\phi : \underbrace{\Pi_{t_0} \times \Pi \times X \times \mathcal{U}}_{\text{questi mi servono per vedere dove evolverà il mio sistema}} \to X$

dove $\Pi_{t_0} = \{ t \in \Pi \mid t \geq t_0 \}$ istanti futuri a t_0

(Funzione di transizione dello stato) $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u(\cdot))$ (è la funzione che mi caratterizza l'evoluzione del sistema)

↑ questa è una funzione

(valgono le seguenti ipotesi)

1° ipotesi: Consistente

$\phi(t_0, t_0, x(t_0), u(\cdot)) = x(t_0) \quad \forall t_0 \in \Pi \ \forall x(t_0) \in X \ \forall u \in \mathcal{U}$

consistente tramite le condizioni iniziali
(se parto da t_0 e torno su t_0, allora rimango in t_0 e quindi il sistema dinamico ritorna in $x(t_0)$)

2° ipotesi: Causalità

$\phi(t_1, t_0, x, u_1(\cdot)) = \phi(t_1, t_0, x, u_2(\cdot)) \quad \forall t_0 \leq t_1, \forall x \in X, \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}$

Allora vale che $u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t < t_1$

↑ oss: qui c'è un minore stretto, quindi all'istante t_1 sono diversi

$u(\cdot)\big|_{[-\infty, t)}$

Lezione 04

Riprendiamo dalle ipotesi per le funzioni di transizione di stato

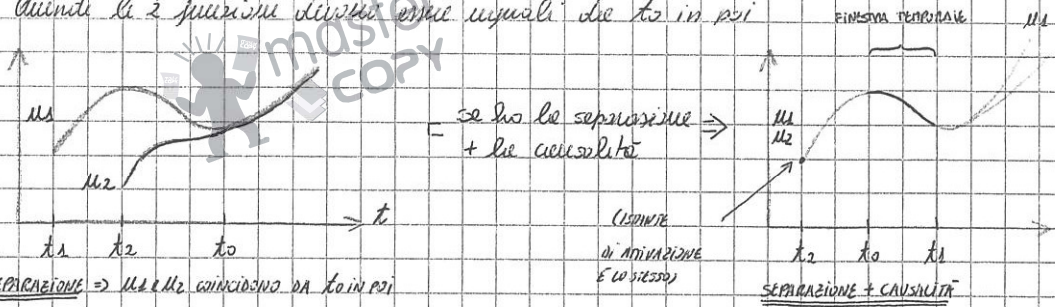
3) Separazione — oss: si intende il valore che assume la funzione $u(\cdot) \equiv u$

se $\phi(t, t_0, x, u_1) = \phi(t, t_0, x, u_2) \quad \forall t_0 \le t \quad \forall x \in X \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow u_1(t) \equiv u_2(t) \quad \forall t \ge t_0$ (è simile alla causalità)

Si sta vedendo che quali istanti devono essere uguali, nel caso della separazione si considera da t_0 in poi.

Quindi le 2 funzioni devono essere uguali da t_0 in poi



SEPARAZIONE ⇒ u_1 e u_2 coincidono da t_0 in poi

oss: la causalità → non dipende dagli ingressi futuri

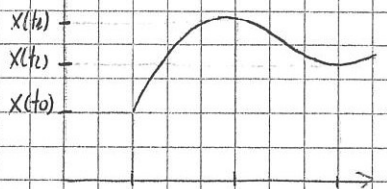
oss: la separazione → tutta l'informazione necessaria per capire dove è lo stato del sistema è contenuta nello stato (contiene l'informazione dell'evoluzione precedente)

(tutto quello prima di t_0 non mi interessa) $x(t) = \phi(t, t_0, x(t_0), u_t) \quad t \ge t_0$ (lo stato contiene all'istante t_0 l'informazione per cui l'evoluzione del sistema nel futuro dipende dall'ingresso e dall'istante t_0 (l'evoluzione precedente non mi interessa)

4) Composizione (grazie separazione mi posso concentrare su un intervallo $[t_0, t]$)

$$x(t_2) = \phi(t_2, t_0, x(t_0), u_{[t_0,t_2)}) = \phi(t_2, t_1, \underbrace{\phi(t_1, t_0, x(t_0), u)}_{x(t_1)}, u) \quad \forall t_0 \le t_1 \le t_2, \forall x(t_0) \in X, \forall u \in \mathcal{U}$$

ϕ (FUNZIONE di TRASFERIMENTO); t_2 (TRAGUARDO); t_0 (INIZIO); $x(t_0)$ (STATO); $u_{[t_0,t_2)}$ (FUNZIONE INGRESSO); $x(t_1)$ (PARTO DA UN ALTRO STATO); t_1 (PARTO DA UN ALTRO ISTANTE)



Cosa significa? se parto da t_0 nello stato $x(t_0)$ e arrivo fino all'istante t_2 dello stato $x(t_2)$ allora è come dire che sono partito da t_1 nello stato $x(t_1)$.

oss: vale se la funzione di ingresso è sempre la stessa.

Vediamo per quanto riguarda le uscite (è la parte dello stato che mi darà più problemi)

$G : \mathcal{U} \times X \to \mathcal{Y}$ questo è un funzionale (restituisce la funzione)

(STATO) (FUNZIONE DI USCITA) (FUNZIONALE)

$(u, x) \to y$ con (u, y) coppia ingresso uscita

$y(t) \in Y \quad y(t) = G(u_{|[t_0,t]}, x(t_0)) \quad \forall t \ge t_0$ per evitare questa notazione un po' pesante, preferisco una indicata con la 2nd immagine ⊛

($y(t)$ VIENE CHE ASSUME UN VALORE DI USCITA ALL'ISTANTE t); (Y INSIEME VALORI USCITA)

TRASFORMAZIONE DI USCITA

⊛ $y(t) = g(x(t), u(t), t)$

oss: $x(t_0), u \longleftrightarrow x(t)$ univocamente determinato

Posso fare anche l'inverso? avere nell'istante lo stato passato dallo stato corrente?
Posso invertire la ϕ? → non è sempre facile