Appunti delle lezioni di Modellistica e Simulazione dei processi di produzione tempo discreti.

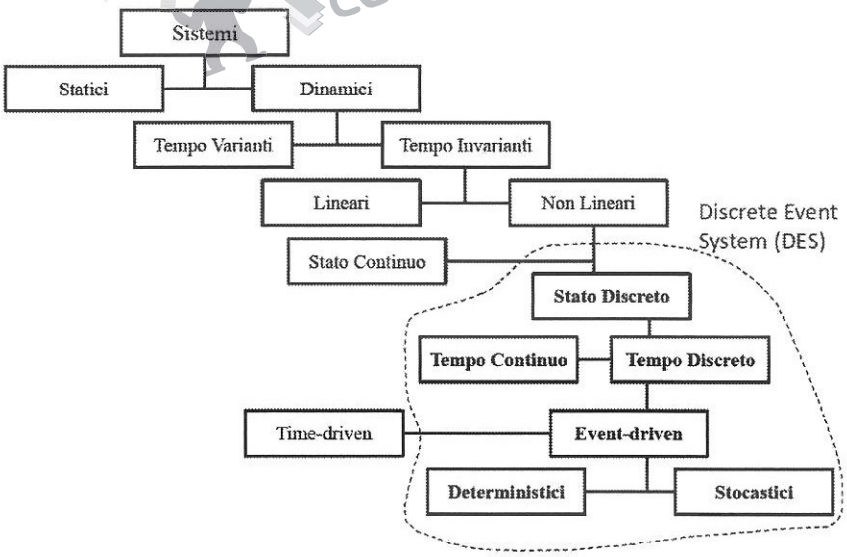
(L. Pallottino & P. Salaris)

Filippo F.

Appunti delle lezioni di "Modellistica e simulazione dei processi di produzione tempo discreti"

Sistema: Insieme di componenti cooperanti e interagenti che realizzano una funzionalità complessiva, impossibile da realizzare da ciascuna parte separatamente.

- *Sistema Statico*: Le uscite del sistema statico non dipendono dai valori passati dalle funzioni di ingresso.
- *Sistema Dinamico*: Le uscite del sistema dinamico dipendono dai valori passati delle funzioni di ingresso.



Sistema deterministico: Sistema in cui è possibile predire esattamente lo stato del sistema dato lo stato iniziale e gli ingressi.

Sistema stocastico: Sistema in cui è possibile predire esattamente la distribuzione di probabilità dello stato del sistema data la distribuzione di probabilità dello stato iniziale e degli ingressi.

Esistono 3 livelli di astrazione di un DES:

1) *Modello a linguaggio non temporizzato*: Sistema descritto semplicemente da una sequenza ordinata di eventi
$$\{e_1, e_2, e_2, \dots, e_N\}$$
Usato per studiare la logica del sistema descritto dal modello.

2) *Modello a linguaggio temporizzato*: Sistema descritto deterministicamente da un vettore di tempi di occorrenza degli eventi.
$$V = \{v_1, v_2, v_2, \dots\}$$

3) *Modello a linguaggio stocastico temporizzato*: Sistema descritto stocasticamente da un vettore di tempi di occorrenza degli eventi.

Modello che permette di analizzare la *varietà nella dinamica del sistema*, dove la componente stocastica descrive l'incertezza del modello. In questo modello la stocasticità è presente sia nei tempi di vita degli eventi, sia nella funzione di transizione di stato che nello stato iniziale.

- ***Linguaggi e automi***

Alcune definizioni utili:

- *Spazio degli eventi* $\mathbb{E}$: Insieme di tutti gli eventi possibili che possono verificarsi nel modello. Lo spazio degli eventi $\mathbb{E}$ rappresenta l'*alfabeto* di un linguaggio L.
- *Linguaggio* L: Insieme di stringhe di lunghezza finita formate da una combinazione degli elementi di $\mathbb{E}$.
- *Stringa o parola*: Sequenza finita degli eventi appartenenti dallo spazio $\mathbb{E}$. In $\mathbb{E}$ è contenuta anche la stringa ε che rappresenta la "stringa vuota" e corrisponde al "nessun evento".

Operazioni su stringhe:

- *Concatenazione*

abb è la concatenazione della stringa ab con la stringa a. A sua volta la stringa ab è la concatenazione della striga a con la stringa b. Anche la stringa a puo' essere vista come concatenazione della stringa a con la stringa vuota ε.

- *Chiusura di Kleene*: Definiamo con chiusura di Kleene il set E^* di tutte le stringhe di lunghezza finita di elementi di $\mathbb{E}$, includendo la stringa vuota ε.

Sia $\mathbb{E} = \{a, b, c\}$ allora $\mathbb{E}^* = \{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, \dots\}$ la chiusura di Kleene di uno spazio di eventi finito ha lunghezza infinita.

Sia data la stringa $s = tuv$ con $t, u, v \in \mathbb{E}^*$ allora:

- t è detto *prefisso* di s
- u è detto *sottostringa* di s
- v è detto *suffisso* di s

Operazioni su linguaggi:

Unione e intersezione: siano $L_a, L_b \subseteq E^*$, allora

$$L_a \cup L_b = \{s \in E^* : s = s_a \cup s_b, \text{con } s_a \in L_a \text{ oppure } s_b \in L_b\}$$
$$L_a \cap L_b = \{s \in E^* : s = s_a \cap s_b, \text{con } s_a \in L_a \text{ e } s_b \in L_b\}$$

Concatenazione: siano $L_a, L_b \subseteq E^*$, allora

$$L_a L_b = \{s \in E^* : s = s_a s_b, \text{con } s_a \in L_a \text{ and } s_b \in L_b\}$$

Esempio: sia $E = \{\varepsilon, a, b, c, x, y\}$, $L_a = \{\varepsilon, a, abb, ac\}$ e $L_b = \{x, y\}$, allora

$$L_a L_b = \{x, y, ax, ay, abbx, abby, acx, acy\}$$

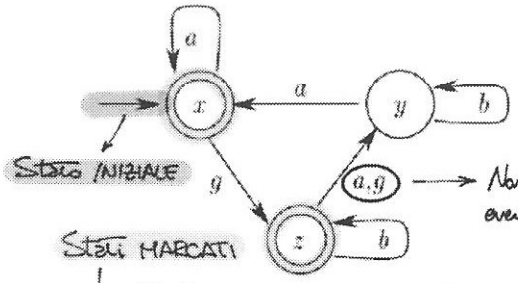
***Chiusura di Kleene**: sia $L \subseteq E^*$, allora*

$$L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k = \{\varepsilon\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup \dots$$

Esempio: sia $L = \{\varepsilon, a, abb, ac\}$, allora

$$L^* = \{\varepsilon, a, abb, ac, aa, aabb, aac, abba, abbabb, abbac, \dots\}$$

- *Automa*: Dispositivo capace di generare un linguaggio. Esso si presenta graficamente come un grafo orientato detto *diagramma di transizione degli stati*. Dove ogni nodo corrisponde ad uno stato e ogni arco ad un evento che determina l'operazione di transizione di stato.



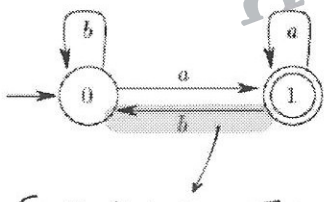
Nell'esempio $E = \{a, b, g\}$ spazio degli eventi

$X = \{x, y, z\}$ spazio degli stati

↳ Stati ai quali è associato il completamento di un TASK. È possibile che il sistema rimanga nello stato. $\Longrightarrow X_m = \{x, z\}$, $X_m \subseteq X$

Funzione di TRANSIZIONE di STATO: $f: X \times E \rightarrow X$ $\Longrightarrow$ Nell'ESEMPIO: $f(x, a) = x$

Stato iniziale — Evento — Stato finale



In questo esempio la FUNZIONE di TRANSIZIONE di stato è detta "TOTALE" perché DEFINITA in ogni stato e per ogni evento.

Se si eliminasse questo ramo la funzione di transizione di stato diventerebbe PARZIALE. (Diventerebbe NON definita per $\forall$ evento.)

Il linguaggio associato è: $L = \{a, aa, ba, aaa \ldots\}$ tutte stringhe che finiscono con l'evento "a".

Se volessi far coincidere lo stato iniziale con ① stato marcato il linguaggio L dovrebbe contenere anche ε "stringa vuota" poiché deve considerare anche il caso di assenza di eventi che portano alla permanenza nello STATO ①.

Per i MODELLI A LINGUAGGIO NON TEMPORIZZATO (*DES non temporizzati*) si usano gli *automi deterministici* (non temporizzati) che sono indicati con una quintupla:

$$\boxed{G = (X, \mathbb{E}, f, x_0, X_m)}$$

dove:

- X insieme degli stati
- $\mathbb{E}$ insieme degli eventi associati a G
- $f: X \times \mathbb{E} \rightarrow X$ funzione di transizione dello stato
- x_0 stato iniziale
- $X_m \subseteq X$ insieme degli stati marcati

Il *linguaggio generato* da G è: $\mathcal{L}(G) = \{s \in \mathbb{E}^*: f(x_0, s) \text{ è definito}\}$

Il *linguaggio marcato* da G è: $\mathcal{L}_m(G) = \{s \in \mathcal{L}(G): f(x_0, s) \in X_m\}$

Due automi sono detti *equivalenti* se hanno stesso linguaggio generato e stesso linguaggio marcato:

$$\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$$
$$\mathcal{L}_m(G_1) = \mathcal{L}_m(G_2)$$

- *Automa a stati finiti*:

$$\boxed{G = (X, \mathbb{E}, f, \Gamma, x_0)}$$

dove:

- X insieme numerabile degli stati
- $\mathbb{E}$ insieme numerabile degli eventi associati a G
- $f: X \times \mathbb{E} \to X$ funzione di transizione dello stato
- $\Gamma: X \to \mathbb{E}$ insieme degli eventi abilitati in corrispondenza dello stato x
- x_0 stato iniziale

Le code di servizio sono un sistema rappresentabile con un *automa a stati finiti*.

I linguaggi che possono essere generati e riconosciuti da un automa a stati finiti sono definiti "*Regolari*" e rappresentati dalla classe $\mathcal{R}$.
Un *linguaggio regolare* è un linguaggio esprimibile da un'*espressione regolare* di eventi, ovvero una combinazione di:

- Unione
- Concatenazione
- Chiusura di Kleene

Teorema di Kleene: Ogni linguaggio rappresentato da un'espressione regolare è regolare ed ogni linguaggio regolare può essere rappresentato da un'espressione regolare.

- ***Aggregazione di stati***

Negli automi spesso sono presenti degli *stati ridondanti* che potrebbero essere rimpiazzati con un singolo stato aggregato. Questa operazione riduce la complessità a scapito della perdita di informazioni ed è utilizzata per *l'analisi dell'evoluzione del sistema*. L'aggregazione degli stati viene effettuata dal *riconoscitore canonico* che individua gli stati definiti "Equivalenti a X_m".

Sia dato un automa $G = (X, \mathbb{E}, f, x_0, X_m)$ dove $\mathcal{L}_m(G) = L$ e $\mathcal{L}(G) = \mathbb{E}^*$ vogliamo ricostruire il riconoscitore canonico:

$$G_{can} = (X_{can}, \mathbb{E}, f_{can}, x_{0,can}, X_{m,can})$$

dove:

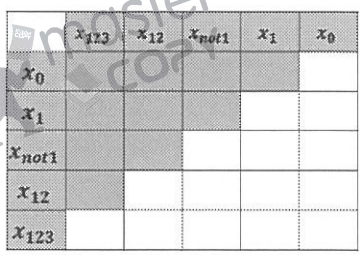
$$\mathcal{L}_m(G_{can}) = L$$
$$\mathcal{L}(G_{can}) = \mathbb{E}^*$$

e la dim. di $X_{m,can}$ è il minimo tra tutti gli automi che marcano L e generano $\mathbb{E}^*$.

- *Algoritmo di riduzione degli stati*:

Supponiamo di essere $X_m \neq X$

1) Costruire la tabella di tutte le possibili coppie di stati



2) Contrassegnare le coppie (x, y) per tutti gli stati tali che $x \in X_m$, $y \notin X_m$.

3) Per le restanti coppie (w, z) non contrassegnate:
   a. Si contrassegna la coppia (w, z) se esiste almeno un $e \in \mathbb{E}$ tale che $(f(w, e), f(z, e))$ è contrassegnata al punto precedente.

4) Ogni coppia non contrassegnata corrisponde a *stati equivalenti*