PL 1

Formato primale standard di PL

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$$

m vincoli
n variabili

A matrice dei vincoli max
c funzione obiettivo n
b vettore dei termini noti m
x soluzione n

solo $\leq$, $\geq$ e $=$ altrimenti potrebbe non essercì soluzione

Linee di isocosto/isoguadagno (sono tutte parallele tra loro e tutte $\perp$ a c)

$$L(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = v\}$$

ogni problema di PL si può condurre equivalentemente in formato primale standard

$\max(c^T x) \longrightarrow -\min(-c^T x)$

- $a^T x \geq b \longrightarrow -a^T x \leq -b$
- $a^T x = b \begin{cases} a^T x \leq b \\ -a^T x \leq -b \end{cases}$

poliedro vuoto/illimitato = non c'è soluzione
↓ ↘ troppi pochi vincoli
vincoli incompatibili

PLI: come PL ma i beni sono indivisibili (soluzioni ammissibili intere)

Poliedro

intersezione di un numero finito di semispazi chiusi

$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

basta avere A e b

Insieme convesso

sottoinsieme $K \in \mathbb{R}^n$ lo è se $\forall$ si scelgono $x^1, x^2 \in K$ si ha

$\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$



Combinazione convessa

$p \in \mathbb{R}^n$ lo è di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ t.c.

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \quad \lambda_i \in [0,1] \ \forall i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \quad (\text{propria: } \lambda_i \neq 1 \ \forall i)$$

Involucro convesso

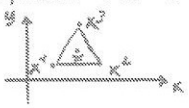
TUTTE le possibili combinazioni convesse di un numero finito di pt

$$conv(K)$$

prendendo un numero finito di pt è il più "piccolo" insieme che li contiene, tutti i pt interni a questo insieme si possono esprimere con coordinate dipendo ai pt che formano l'insieme

- 2 pt Segmento
- 3 pt triangolo
- 4 pt quadrato
- 5 pt pentagono

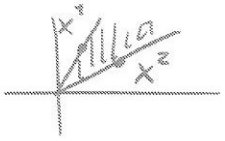
non dipende solo dai pt



un insieme convesso coincide col suo inviluppo convesso

Cono

se $x \in K$, $\forall \lambda \geq 0$ $\lambda x \in K$ $K \in \mathbb{R}^n$



se K contiene un punto diverso dall'origine, contiene tutta la semi-retta uscente dall'origine passante per x

Combinazione conica

pt $x \in \mathbb{R}^n$ lo è di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ t.c.

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \qquad \lambda_i \geq 0 \ \forall i \quad \text{(propria: } \lambda_i > 0 \ \forall i\text{)}$$

Inviluppo conico

TUTTE le possibili combinazioni **coniche** di un numero finito di pt

$cono(K)$ ← è il più piccolo insieme conico che contiene K

Combinazione **lineare**

pt $x \in \mathbb{R}^n$ lo è di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ t.c.

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$$

Thm - di rappr. dei poliedri

dato poliedro P, $\exists$ sottoinsieme finito $V = \{v^1, \dots, v^m\}$ di P e $E = \{e^1, \dots, e^p\}$ eventualmente anche vuoti t.c.

$$P = conv(V) + cono(E)$$

stessa cosa dati A e b

↑ insieme di tutte le possibili somme di un elemento di V con un elemento di E

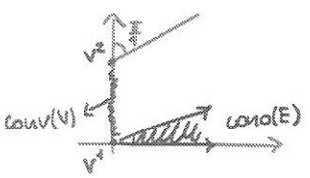
è <u>C.N.S.</u>, quindi dati V ed E $\exists P = conv(V) + cono(E)$

- $conv(V)$ → sicuramente non vuoto
- $cono(E)$ → vuoto se il poliedro è illimitato

punti di V: del poliedro

punti di E: direzioni in cui va all'infinito

se P è illimitato può fare $+\infty$, dipende da c



$v^1 = (0,0)$

$v^2 = (0,1)$

$e^1 = (0,1)$

$e^2 = (1,1)$

Vertice

pt del poliedro che NON si può esprimere come combinazione convessa propria di pt del poliedro ($\lambda_i \neq 1 \ \forall i$)

- oppure un punto di P che non sta all'interno di nessun segmento di P
- se un poliedro è illimitato ha sempre vertici
- se un poliedro ha vertici, $V = \{\text{vertici}\}$

Th2 - fondamentale della PL — ha vertici

dato un problema di PL, se il poliedro è non vuoto e la f.o. non va a $+\infty$ → uno dei vertici è la soluzione ottima

se $\bar{x} \in P \rightarrow \bar{x} = \sum \bar{\lambda}_i v^i + \sum \bar{\mu}_j e^j$ dove $\bar{\lambda}_i \in [0,1]$, $\bar{\mu}_j \geq 0 \ \forall i,j$ $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$

$$c\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i (cv^i) + \sum_{j=1}^{k} \bar{\mu}_j (ce^j)$$

se $c \rightarrow +\infty$ $\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i (cv^i) < +\infty$ dato che $\bar{\lambda}_i \in [0,1] \ \forall i$

$\sum_{j=1}^{k} \bar{\mu}_j (ce^j) \rightarrow +\infty$ se $\exists ce^j > 0$ e mi fermo, P fa $+\infty$

se $ce^j \leq 0 \ \forall j$ si fa il max della prima: $\max \sum \lambda_i (cv^i) \leq \sum \lambda_i (cv^k) = cv^k \sum \lambda_i = cv^k$

dove $cv^k = \max(cv^i)$

e $cv^k \in \max \sum \lambda_i (cv^i)$ perché $v^k \in P$

quindi $\boxed{\max_{x \in P} cx = cv^k}$

Problema di PL di assegnamento di costo minimo

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1 \dots n \leftarrow \text{ogni persona fa al più 1 lavoro} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1 \dots n \leftarrow \text{ogni lavoro svolto da esattamente una persona} \\ x_{ij} \in [0,1] \quad \text{cooperativo} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{non cooperativo} \end{cases}$$

n lavori, persone
n^2 variabili
$x_{ij} = 1 \rightarrow$ lavoro i assegnato alla persona j

- n! possibili assegnamenti
- in primale standard la matrice A ha $4n + 2n^2$ righe $\begin{cases} x \geq 0 & n^2 \\ -x \leq 0 & n^2 \end{cases}$
- normalmente sono $2n$ vincoli (matlab)

Formato duale standard di PL

$$\begin{cases} \min y^T b \\ Ay = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

poliedro senza vertici ⟷ contiene rette

← è un poliedro nel primo quadrante

↳ non contiene rette

↳ ha sicuramente vertici!

intersezione di rette

Trucchi standard

Trucchi standard

1. $\min c^T x \longleftrightarrow -\max(-c^T x)$

2. $x_1 \geq 1 \longrightarrow -x_1 \leq -1$

3. $x_1 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ -x_1 \geq -1 \end{cases}$

4. $3x_1 + 2x_2 \leq 1 \longrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$ — slack variable: · una V equazione · non va nella f.o.

$$\begin{cases} -\min(-x_1 - x_2) \\ 4x_1 + 5x_2 = 7 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \leq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -\min(x_1 - x_2) \\ -4x_1 + 5x_2 = 7 \\ -2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

5. Imporre positività alle x_i dove di loro natura non hanno

porre $x_2 = (x_3 - x_4)$ $x_3, x_4 \geq 0$ — nuove variabili

$$\begin{cases} -\min(x_1 - x_2) \\ -4x_1 + 5x_2 = 7 \\ -2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -\min(x_1 - (x_3 - x_4)) \\ -4x_1 + 5(x_3 - x_4) = 7 \\ -2x_1 + (x_3 - x_4) = 7 \\ x_1, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Vertici, soluzioni di base e basi primali

Sia $I = \{1, \dots, m\}$ insieme di indici di riga, $B \subseteq I$ con $|B| = n$ sottoinsieme di n indici di riga, sia $A_B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sottomatrice quadrata ottenuta selezionando gli $i \in B$ e b_B i corrispondenti termini noti:

$A_B \mid \det A_B \neq 0 \longrightarrow$ matrice di base (prendiamo vincoli non paralleli/sovrapposti)

la soluzione $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ del sistema $A_B \bar{x} = b_B \longrightarrow$ soluzione di base relativa alla base B

se $A_N \bar{x} \leq b_N$, la soluzione di base si dice ammissibile $\longrightarrow$ è un vertice

Se rispetta tutti i vincoli, N sono m−n indici non di base

$A_N(A_B^{-1} b_B) - b_N \leq 0$



Th3 - caratterizzazione dei vertici

vale anche nel duale standard

un pt. $\bar{x} \in P$ è un vertice $\longleftrightarrow$ è una soluzione di base ammissibile

potrei quindi prendere tutte le combinazioni di indici di riga, trovare A_B^{-1}, risolvere e verificare la condizione

un problema ad m vincoli non ha m vertici dato che serve che $\det A_B^{-1} \neq 0$



esempino

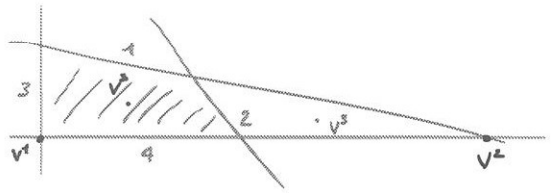
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = (5, 5, 0, 0)$$

$B = \{3, 4\}$, $N = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b_B = (0, 0)$

$\bar{x} = A_B^{-1} b_B = (0, 0) \longrightarrow$ ammissibile?

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \bar{x} = (0, 0) \quad b_N = (5, 5)$$

$A_N \bar{x} - b_N \leq 0 \longrightarrow (0,0) - (5,5) = (-5,-5) \leq 0$ ✓



	di base	ammissibile	
V^1	✓	✓	$B = \{3,4\}$
V^2	✓	×	$B = \{1,4\}$
V^3	×	✓	$B = \emptyset$
V^4	×	✓	$B = \emptyset$

degenere: soluzione generata da più basi: verifica $A_N \bar{x} = b_N$ per almeno 1 vincolo
↳ una base genera UNA soluzione di base tho

ottima: $\max c^T \bar{x}$ non solo i vertici sono ottimi, potrebbe esserlo un intero segmento

almeno 1 vertice ottimo c'è sempre

Linprog

risolve problemi di minimo

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \leq b \\ A_{eq} x = b_{eq} \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$$

$[x, v] = \text{linprog}(c, A, b, A_{eq}, b_{eq}, LB, UB)$

($c^T x$ ← , x ↑ sol. ottima)

CAB ABeq LUB

• $x \geq 0$ è implicito!!

Quanti sono i vertici

è impossibile fare enumerazione totale dei vertici dato che sono (alla peggio):

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

(su m possibili → , scegliere n indici di riga →, ← coefficiente binomiale)

ovvero le possibili sottomatrici quadrate nxn estraibili da una mxn

Dualità

$$(P) \begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{cases} \longrightarrow (D) \begin{cases} \min y^T b \\ y^T A = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

primale standard — duale standard corrispondente

ogni problema ammette il duale standard visto che ogni problema si può ricondurre a primale standard

esempio

$$\begin{cases} \max (x_1 + x_2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$b = (7, 8, 3)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

$y^T = (y_1, y_2, y_3)$

$c = (1, 1)$

$$\begin{cases} \min(7y_1 + 8y_2 + 3y_3) \\ 3y_1 + 5y_2 - 4y_3 = 1 \\ y_1 - 6y_2 + 5y_3 = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$