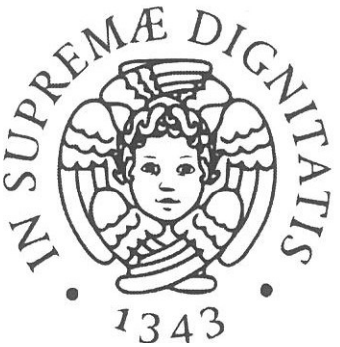
Appunti di Ricerca Operativa

Alex Parri

A.A. 21/22



Indice

1 Introduzione al corso **8**

1.1 Primo problema 9

2 PL - Programmazione Lineare **17**

2.1 PL - Problema di produzione 19
2.2 Poliedro 21
2.3 Geometria della PL 21
2.3.1 Insieme convesso 21
2.3.2 Combinazione convessa 21
2.3.3 Involucro convesso 22
2.3.4 Cono 24
2.3.5 Combinazioni coniche 24
2.3.6 Involucro conico 24
2.3.7 Th1 - di rappresentazione di Poliedri 26
2.3.8 Esempio: quadrato unitario 29
2.3.9 Vertice 31
2.3.10 Th2 - fondamentale della PL 32
2.4 PL - Problema di assegnamento di costo minimo 36
2.5 Forme standard di PL 40
2.6 Calcolo dei vertici di un poliedro (primale standard) 43
2.6.1 Soluzione di base 45
2.7 Th3 - caratterizzazione dei vertici 46
2.8 Linprog 50
2.9 Ripassino 52
2.10 Quanti sono i vertici 53
2.11 Test di ottimalità di un vertice teorico 54
2.11.1 Teoria della dualità 54
2.11.2 Th4 - della dualità 55
2.12 Metodo diretto per il calcolo di vetici di D 56
2.13 Th3bis - caratterizzazione dei vertici 57
2.14 Considerazione 59
2.15 Test di ottimalità di un vertice pratico 59
2.16 PL - problema di trasporto 61
2.17 Test di ottimalità di un vertice di duale standard 67
2.18 Th5 67

master COPY COPISTERIA

2.19 Algoritmo del SIMPlesso primale 69
2.20 Algoritmo del simplesso duale 78
2.21 Esercizio simplesso duale 81
2.22 Esercizio riassuntivo 83
2.23 Ricavo del primo vertice 85
2.24 Th7 88
2.25 Caso degenere, osservazioni 90
2.26 Th6 91
2.27 Domanda finale 30/30L 92

3 PLI - Programmazione Lineare Intera **93**
3.1 PLI - problema di caricamento/dello zaino 93
3.1.1 Zaino binario divisibile (4c) 99
3.1.2 Zaino binario indivisibile (4d) 100
3.1.3 Esercizino 101
3.2 Th8 - algoritmo per la soluzione ottima di 4a 102
3.3 Th8bis - algoritmo per la soluzione ottima di 4c 102
3.4 Relazioni tra PLI e PL 103
3.5 PLI - TSP/commesso viaggiatore 104
3.5.1 TSP asimmetrico 109
3.5.2 TSP simmetrico 112
3.6 Algoritmi di riduzione del gap 121
3.7 Th9 - di equivalenza teorica tra PL e PLI 124
3.8 Costruire piani di taglio (Gomory) 125
3.9 Th10 - piano di taglio di Gomory 126
3.10 Esercitazione omnicomprensiva + `intlinprog` 127
3.11 Soluzioni ammissibili per problemi di produzione di PLI . . . 130
3.12 Esercizio (PL) 131
3.13 PLI - "bin packing" 133
3.13.1 Algoritmi greedy per la V_S 138
3.14 Branch and bound 140
3.14.1 Per problemi di min 140
3.14.2 Regole di taglio 144
3.14.3 Esempio 1 (TSP simmetrico) 147
3.14.4 Per problemi di max 150
3.14.5 Esempio 2 (Zaino binario) 152

master COPY

master COPY

master COPY COPISTERIA

3.14.6 Esempio 3 (TSP simmetrico) 153
3.14.7 Esempio 4 (Zaino binario) 156
3.14.8 Per problemi non combinatori 156
3.15 PLI - localizzazione 159
3.15.1 Copertura di costo min (7a) 159
3.15.2 Max copertura (7b) 162
3.15.3 Algoritmo di Chvatal 166
3.15.4 Regole di riduzione della matrice 168
3.16 Varianti sul tema dei modelli 169
3.16.1 Variante 1 169
3.16.2 Variante 2 169
3.16.3 Variante 3 170

4 PLsR - PL su Reti **171**
4.1 PLsR - flusso di costo minimo su reti bilanciate 171
4.2 Th11 - caratterizzazione delle basi nei problemi di flusso . . 179
4.3 Considerazioni 182
4.4 Matrici unimodulari 187
4.5 Th12 - dell'interezza 187
4.6 Simplesso su reti duale 187
4.7 Costo ridotto 195
4.8 Th13 - di Bellmann 196
4.9 Esercizio simplesso su reti (duale) 196
4.10 PLsR - cammini minimi orientati 199
4.11 Simplesso per cammini 202
4.12 Domandine 204
4.13 PLsR - flusso di costo minimo su reti capacitate 204
4.14 Th11bis 206
4.15 Tecnica di tripartizione degli archi 207
4.16 Th11ter 208
4.17 Th11 summed up 208
4.18 Calcolo del flusso di base (reti capacitate) 209
4.19 Esercizio rete capacitata 210
4.20 Esercizio 2 rete capacitata 213
4.21 Potenziali su rete capacitate 214
4.21.1 Calcolo del potenziale di base 214

master COPY

4.21.2 Th14 . . . 217
4.21.3 Th13bis - Bellmann . . . 217
4.21.4 Esercizio . . . 218
4.22 PL - addendum sul problema dell'assegnamento . . . 220
4.23 Simplesso su reti capacitate . . . 223
4.23.1 Arco che viene da L . . . 224
4.23.2 Arco che viene da U . . . 227
4.24 Esercizio simplesso su rete capacitata . . . 229
4.25 PLsR - massimo flusso . . . 230
4.25.1 Tecnica dell'arco fittizio . . . 234
4.26 Esercizio massimo flusso . . . 235
4.27 Taglio della rete . . . 241
4.28 Capacità del taglio . . . 241
4.29 Th15 - "max-flow ↔ min-cut" . . . 242
4.30 Algoritmo di Ford-Fulkerson . . . 242
4.30.1 Procedura Edmonds-Karp per la ricerca di C_{aum} . . . 245
4.30.2 Utilizzo degli archi fittizi . . . 253
4.31 Th16 - correttezza di Ford-Fulkerson . . . 256
4.32 Esercizio Ford-Fulkerson . . . 256
4.33 PLsR - Assegnamento di massima cardinalità . . . 258
4.34 Algoritmo di Dijkstra . . . 262
4.35 Esercizio Dijkstra . . . 268
4.36 Considerazioni finali . . . 269
4.37 Esercitazione (da orale) . . . 271
4.38 Cosetta importante . . . 280

5 PNL - Programmazione Non Lineare 283
5.1 Prerequisiti di Analisi 2 . . . 283
5.1.1 Derivate parziali . . . 284
5.1.2 Derivate direzionali . . . 285
5.1.3 Gradiente . . . 285
5.1.4 Matrice hessiana . . . 286
5.1.5 Usare ∇f/Hf/deriv. direz. per trovare min/max . . . 286
5.1.6 Minimi locali . . . 288
5.1.6.1 Th1 PNL - di Fermat (CN) . . . 288
5.1.6.2 Th2 PNL (CN) . . . 289