RICERCA OPERATIVA I

I PROBLEMI DI RICERCA OPERATIVA SONO PROBLEMI DECISIONALI DI OTTIMIZZAZIONE DI UN OBIETTIVO IN PRESENZA DI RISORSE LIMITATE.

È UN PROBLEMA DI RICERCA DI UN MAX O UN MIN DI UNA FUNZIONE (F. OBIETTIVO) RISTRETTA AD UNA REGIONE DELLO SPAZIO DEFINITA DA VINCOLI (REGIONE AMMISSIBILE).

I VARI STADI DI UN PROBLEMA DI R.O. SONO

1) RACCOLTA DEI DATI DEL PROBLEMA
2) COSTRUZIONE DI UN MODELLO MATEMATICO
   a) INTRODUZIONE DELLE VARIABILI
   b) COSTRUZIONE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO
   c) COSTRUZIONE DEI VINCOLI
3) RICERCA DELLA SOLUZIONE OTTIMA MEDIANTE UN ALGORITMO

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

ALGORITMO: SEQUENZA DI ISTRUZIONI CHIARE CHE UN ESECUTORE, IN TEMPO LIMITATO, COMPIE PER OTTENERE UNA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA

—o—o—

PROBLEMA DI PRODUZIONE

OBIETTIVO: MASSIMIZZARE IL GUADAGNO (c_j GUADAGNO OTTENUTO VENDENDO L'OGGETTO j) DELLA PRODUZIONE DI m OGGETTI (COMPOSTI DA m DIVERSE MATERIE PRIME) DATA UNA MATRICE DI COMPOSIZIONE TECNOLOGICA (A) LA QUALE FORNISCE LE PROPORZIONI DI MATERIE PRIME NECESSARIE ALLA PRODUZIONE DEGLI m OGGETTI, RISPETTANDO LE DISPONIBILITÀ.

IL MODELLO È:

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1, \dots, m \\ x_j \ge 0 \qquad j = 1, \dots, m \end{cases} \Rightarrow \text{SCRITTURA PIÙ COMPATTA} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \max cx \\ Ax \le b \end{cases}}$$

$c \in \mathbb{R}^m$
$A \in M^{m \times m}$
$b \in \mathbb{R}^m$
$x \in \mathbb{R}^m$

È UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE PRIMALE STANDARD.

È LINEARE POICHÉ LA F.O. E I VINCOLI SONO LINEARI

SE IL BENE DA PRODURRE NON È DIVISIBILE È NECESSARIO INTRODURRE IL VINCOLO DI INTEREZZA $\boxed{x_j \in \mathbb{Z}}$

DICESI PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL) UN PROBLEMA DI MINIMO O MASSIMO DI UNA FUNZIONE LINEARE SOGGETTA A VINCOLI LINEARI CON IL $\le, \ge 0 =$.

PROBLEMA DI IDENTIFICAZIONE DEI DATI PER STRUMENTI INFORMATICI (LINPROG)

IN INPUT : $f, A, b, A_{eq}, b_{eq}, LB, UB$ CHE SONO LEGATI DALLE RELAZIONI

$$\begin{cases} \min fy \\ Ay \le b \\ A_{eq}y = b_{eq} \\ LB \le y \le UB \end{cases}$$

OSSERVAZIONI:

- RISOLVE SIA PROBLEMI DI MIN CHE DI MAX

$$(\min cx = -\max(-cx))$$

- TRATTA SOLO I VINCOLI COL $\le$, QUINDI I VINCOLI COL $\ge$ VANNO MOLTIPLICATI PER -1

esempio di identificazione dei dati

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ x_i \ge 0 \quad i = 1, \dots, 4 \\ x_i \le 5 \quad i = 1, \dots, 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$f = [-3 \quad -6 \quad 0 \quad -4]$

$A = [-2 \ -3 \ -5 \ -1 \ ; \ 3 \ 1 \ 1 \ 0]$

$b = [-1 \ ; \ 8]$

$A_{eq} = [\,] \qquad b_{eq} = [\,]$

$LB = [0 \ ; \ 0 \ ; \ 0 \ ; \ 0]$

$UB = [5 \ ; \ 5 \ ; \ 5 \ ; \ 10^{10}]$ → fa capire che non ci sono limiti superiori per x_4

LA MATRICE A E IL VETTORE b, NEL PROBLEMA DI PL SARANNO

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$Ax \le b$

$x_1 \ge 0 \rightarrow -x_1 \le 0$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

PROBLEMA DI DIETA

OBIETTIVO: DETERMINARE UNA DIETA GIORNALIERA CHE MINIMIZZI IL COSTO TOTALE E CHE RISPETTI IL FABBISOGNO MINIMO GIORNALIERO b_i DI OGNI PRINCIPIO NUTRIZIONALE $i=1,\dots,m$

$x_j \rightarrow$ QUANTITÀ DI CIBO j DA INTRODURRE NELLA DIETA

IL MODELLO È:

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j \geq b_i \qquad i=1,\dots,m \\ x_j \geq 0 \qquad j=1,\dots,n \end{cases}$$

q_{ij} QUANTITÀ DELL'i-ESIMO PRINCIPIO NUTRIZIONALE CONTENUTA NEL j-ESIMO CIBO

PROBLEMA DI MISCELAZIONE (Vedi libro pag 17-18)

—o—o—

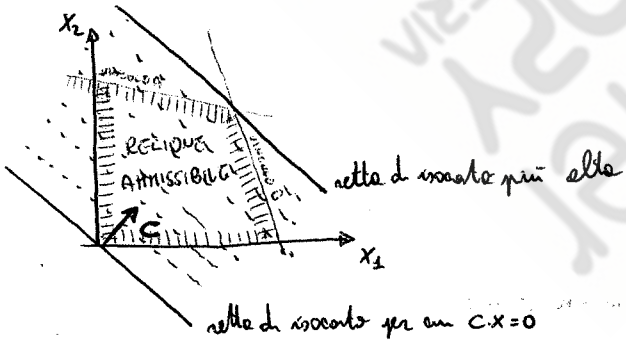
RISOLUZIONE GEOMETRICA DI UN PROBLEMA DI PL IN $\mathbb{R}^2$

È QUINDI UN PROBLEMA DI PL CON DUE VARIABILI $(x_1 \text{ e } x_2)$

1° PASSO: DISEGNARE LA REGIONE AMMISSIBILE

2° PASSO: DISEGNARE LA RETTA DI ISOCOSTO PER CUI $cx=0$

3° PASSO: DISEGNARE TUTTE LE ALTRE RETTE DI ISOCOSTO, FINO A TROVARE LA RETTA DI ISOCOSTO PIÙ ALTA TRA QUELLE CHE INTERSECANO LA REGIONE AMMISSIBILE.



il vettore c indica che in quella direzione cresce il costo.

—o—o—

SDOPPIAMENTO DEL VINCOLO

esempio: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$

LA PROGRAMMAZIONE LINEARE PRIMALE STANDARD RISOLVE VINCOLI LINEARI SIA $\leq$, $\geq$ $=$ MA IL MODELLO MATEMATICO ACCETTA SOLO VINCOLI DEL TIPO $Qx \leq b$ (ESSENDO $Ax \leq b$)

QUINDI RIPORTIAMO IL VINCOLO IN QUESTA FORMA

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 7 \\ -2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \leq -7 \end{cases} = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

PROBLEMA DEL TRASPORTO

SUPPONIAMO DI AVERE m LUOGHI DI PRODUZIONE COLLEGATI A m LUOGHI DI RACCOLTA (DESTINAZIONE)

SUPPONIAMO NOTE LE CAPACITÀ PRODUTTIVE r_j $(\text{per } j = 1, \dots, m)$, LE DOMANDE q_i $(\text{per } i = 1, \dots, m)$ ED IL COSTO DI TRASPORTO DA OGNI LUOGO DI PRODUZIONE A OGNI LUOGO DI DESTINAZIONE PROPORZIONALE ALLE DISTANZE TRA I DUE LUOGHI.

esempio

CITTÀ RICHIEDENTI	LIVELLO DI RICHIESTA
VR	10
PG	12
Roma	20
PE	24
TA	18
LR	30

(m) → q_i

CITTÀ CHE SPEDISCONO	LIVELLO DI DISPONIBILITÀ
GE	20
VE	15
AN	25
NA	33
BA	21

(m) → r_j

TABELLA DELLE DISTANZE KILOMETRICHE

	GE	VE	AN	NA	BA
VR	290	115	355	715	810
PG	380	340	165	380	610
Roma	505	530	285	280	450
PE	655	450	155	240	315
TA	1010	840	550	305	95
LR	1072	1097	747	372	373

INDICA ANCHE I COSTI ESSENDO QUESTI LEGATI ALLE DISTANZE (es $c_{ij} = 0{,}1\, d_{ij}$) d_{ij}

SUPPONIAMO POI CHE LA DOMANDA SIA UGUALE ALL'OFFERTA $\left(\sum q_i = \sum r_j\right)$

L'AZIENDA VUOLE DETERMINARE UN PIANO DI TRASPORTO, COMPATIBILE CON LA PRODUZIONE E CON LA RICHIESTA, CHE MINIMIZZI IL COSTO TOTALE DEL TRASPORTO.

nel nostro esempio, quante sono le variabili decisionali? 30 (6x5)

$x_{ij} \rightarrow$ (quanto i riceve da j)

$$\begin{matrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{6,1} & x_{6,2} & x_{6,3} & x_{6,4} & x_{6,5} \end{matrix}$$

→ QUANTO VR RICEVE DA

1 GE
2 VE
3 AN
4 NA
5 BA

ABBIAMO CHE $x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} + x_{5,1} + x_{6,1} = 20 \rightarrow \sum_{i=1}^{6} x_{i,1} = 20$ QUANTO GENOVA PUÒ TRASPORTARE

$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = r_j \quad \forall j$ → QUANTO LA CITTÀ j PUÒ TRASPORTARE

$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = q_i \quad \forall i$ → QUANTO LA CITTÀ i DEVE RICEVERE

$x_{ij} \geq 0$ → SI INTENDE $\begin{cases} x_{1,1} \geq 0 \\ \vdots \\ x_{6,5} \geq 0 \end{cases}$ matrice 30×30

NB. IL VINCOLO DI INTEREZZA VA MESSO SE I BENI NON SONO DIVISIBILI

IL MODELLO MATEMATICO DEL PROBLEMA DEL TRASPORTO È:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j \quad \forall j \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = q_i \quad \forall i \\ x \geq 0 \end{cases}$$

nel pacchetto di Simplex alliamo

$f = [c_{11}\ 29 \quad c_{12}\ 11{,}5 \quad c_{13}\ 35{,}5 \quad c_{14}\ 71{,}5 \quad c_{15}\ 81 \quad c_{21}\ 38 \quad \dots \quad c_{65}\ 37{,}3]$

$UB = [\,] \quad A = [\,] \quad b = [\,]$ perché ho solo vincoli di uguaglianza

$LB = [0, 0, 0, 0, \dots 0]$ 30 zeri

$b_{eq} = [20\ 15\ 25\ 33\ 21\ 10\ 12\ 20\ 24\ 18\ 30]$

$A_{eq} \cdot x = b_{eq}$ $\quad A_{eq} \in \mathbb{R}^{11 \times 30}$ $\quad b_{eq} \in \mathbb{R}^{11}$

Nella PL $Ax \leq b$ la matrice A ha 52 righe perché 22 ne ottengono glissando gli 11 vincoli, 30 sono le $x_{ij} \geq 0$

OSSERVAZIONI SULLA REGIONE AMMISSIBILE

$\begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases}$ $\Rightarrow$ PROBLEMA DI PL

LA REGIONE AMMISSIBILE DEI PROBLEMI DI PL STANDARD È L'INTERSEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI SEMISPAZI CHIUSI.

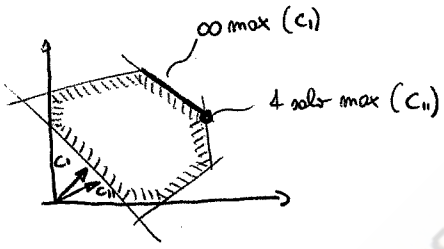
GEOMETRICAMENTE È UN POLIEDRO DI $\mathbb{R}^m$

- INTERSEZIONE: TUTTI I VINCOLI DEVONO ESSERE RISPETTATI
- DI UN NUMERO FINITO: UN NUMERO FINITO DI VINCOLI
- DI SEMISPAZI: I VINCOLI SONO LINEARI
- CHIUSI: TRATTO SOLO I VINCOLI DI TIPO $\leq$

LE SOLUZIONI OTTIME POSSONO ESSERE 1 O INFINITE.

MASTER COPY

Tel. 388/9837745



NON CI SONO SOLUZIONI OTTIME ALL'INTERNO DELLA REGIONE AMMISSIBILE

- SE IL POLIEDRO È VUOTO, SIGNIFICA CHE HO TROPPI VINCOLI (DEVO TOGLIERNE ALCUNI)
- SE IL POLIEDRO È LIMITATO ESISTE SICURAMENTE UN MAX (1 o ∞)
- SE IL POLIEDRO È INFINITO, SIGNIFICA CHE HO DIMENTICATO QUALCHE VINCOLO

GEOMETRIA DELLA PL

PROPRIETÀ DEI POLIEDRI IN $\mathbb{R}^m$

IN UN PROB. DI CALCOLO UN POLIEDRO SI IDENTIFICA MEDIANTE UNA MATRICE E UN VETTORE $(Ax \leq b)$

- **INSIEME CONVESSO**

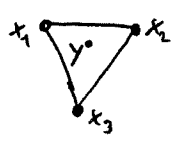


PRENDENDO DUE PUNTI INTERNI AL POLIEDRO, IL SEGMENTO CHE LI UNISCE È TUTTO CONTENUTO NEL POLIEDRO.

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in P \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

- **COMBINAZIONE CONVESSA** di K punti di $\mathbb{R}^m$

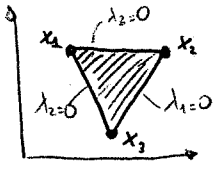
$$y = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i \quad \left[\begin{matrix} \lambda_i \in [0,1] \\ \sum \lambda_i = 1 \end{matrix} \right]$$



(COMBINAZIONE CONVESSA PROPRIA $\lambda_i \in (0,1)$ $\rightarrow$ insieme aperto)

- **INVOLUCRO CONVESSO** di K punti di $\mathbb{R}^m$ (CONV)

È L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI CONVESSE (è un insieme limitato)



è il più piccolo insieme convesso che contiene i punti dati
↑ nel senso dell'inclusione