RISOLVERE UN PROBLEMA DI R.O.

① Riconoscere un **PROBLEMA DI RIC. OPE.** (ottimizzazione di un problema)

② **RACCOLTA DEI DATI** → { Obiettivo, i dati devono essere tali da risolvere la mia funz. obiettivo
Vincoli, imposti dal problema

③ **FORMULAZIONE MODELLO MATEMATICO**
che interpreti il problema

Il modo principale per farlo è **INTRODURRE LE VARIABILI**. Avremo le variabili **DECISIONALI** cioè le incognite del mio problema che mi servono per massimizzare / minim. la funzione obiet.

④ Costruire un **ALGORITMO RISOLUTIVO** → si intende una sequenza di istruzioni finite che, in tempo limitato, permettono di ottenere la risoluzione del problema

⑤ **IMPLEMENTAZIONE** dell'algoritmo e quindi individuazione dei risultati

⑥ **FEEDBACK** cioè la risposta del sistema deve avere senso, deve essere compatibile con i dati e con la realtà

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

INTERPRETAZIONE DEI DATI → PL PRIMALE STANDARD

Il nostro modello matematico potrebbe avere forma (il vettore X è il vettore delle variabili decisionali):

FORMATO STANDARD

$$\max \; c \cdot x \qquad (c \cdot x: \text{prodotto scalare})$$
$$Ax \leq b \qquad (\leq: \text{vincoli})$$

con $X \in \mathbb{R}^n$ quindi: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Il modello così visto si chiama **PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE PRIMALE STANDARD!**

- esiste un software che li risolve
- funz. obiettivo è lineare così come i vincoli
- molti dei problemi che avremo sono di questo tipo

Tale tipo di modello è molto frequente quando è richiesto di massim/minim la mia funzione imponendo però dei vincoli. Interpretare i dati vuol dire scrivere i comandi software per risolvere il sistema una volta ricavato il mio modello matematico:

$$\max \; 16x_a + 12.5x_b + 22.5x_c$$

$$\begin{cases} 0.3x_b + 0.5x_c \leq 1000 \\ x_a \geq 2x_b \\ x_a \leq x_c \\ (x_a, x_b, x_c) \geq 0 \end{cases}$$

segno $\leq$ perché lo standard è così

$$c = [-16; -12.5; -22.5]$$

vettore colonna $\Rightarrow$ si fa così

$$b = [1000; 0; 0; 0; 0; 0]$$

$$A = [0.03, 0.5; -1, 2, 0; \ldots]$$

↑ tanti elementi quanti sono in c

In generale, in un problema di produzione:

- gli elementi del vettore c rappresentano il guadagno unitario dell'oggetto i-esimo
- " " b rappresentano la disponibilità di materia prima
- ogni oggetto è composizione di m materie prime in proporzioni diverse tra loro, date da una matrice di composizione A

FORMATO STANDARD

Dato un problema, quello che si vuole è portarlo in formato standard. Gli accorgimenti sono due:

- in caso di $\geq$ nei vincoli ricavo $\leq$ cambiando di segno
- se invece di massimizzare devo minimizzare basta sapere che:

$$\min f(x) = -\max(-f(x)) \quad \text{oppure} \quad \max f(x) = -\min(-f(x))$$

basta quindi cambiare di segno agli elementi di c e il massimo individuato dovrà poi essere cambiato di segno

Inoltre si può notare che:

$$\operatorname{argmin}(f(x)) = \operatorname{argmax}(-f(x))$$

cioè il punto di minimo (ascissa) di $f(x)$ coincide con il punto di massimo di $(-f(x))$!

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

PROBLEMA DI ASSEGNAMENTO E PL

operai \ lavori	1	2	3	4
1	22	18	20	16
2	14	20	19	17
3	23	21	19	16
4	19	14	22	18

Immaginiamo di avere 4 uomini a cui bisogna assegnare 4 lavori. L'incrocio ij tra riga e colonna è il costo che quell'operaio ha per quel lavoro j.
L'obiettivo è ovviamente minimizzare il costo totale con il vincolo però che ad ogni uomo venga assegnato uno e un solo vincolo (caso intero)

Un possibile algoritmo è quello della **FORZA BRUTA** che consiste nell'analizzare tutte le possibili combinazioni: il costo sarà $n!$ perchè non sono altro che permutazioni di $(1,2,3,4)$.
Elencare tutte le possibili combinazioni si dice **ENUMERAZIONE TOTALE** - ovviamente ciò è possibile se il numero di combinazioni sono finite; se per esempio il problema dell'assegnamento poteva essere fatto assegnando a un uomo più quote di lavoro (una per ogni lavoro) non era più enumerabile!

MODELLO MATEMATICO

Introduciamo una **VARIABILE BINARIA** $x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ NON COMPIE il lavoro } j \\ 1 & \text{se } i \text{ COMPIE il lavoro } j \end{cases}$

Dato una matrice $m \times m$, avrò m^2 variabili (meno non si può): $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22} \ldots$
Se io prendo il vettore così composto, esso può contenere una mia soluzione in forma $(1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \ldots)$

Una soluzione è **AMMISSIBILE** se rispetta i vincoli mentre una **OTTIMA** è quella che mi ottimizza la funzione obiettivo.
Il problema può essere scritto in questo modo:

MATRICE VISTA IN FORMA DI VETTORE

$$\min \; c \cdot x$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall_i$$

SOMMA di OGNI RIGA (un uomo fa un solo lavoro)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall_j$$

SOMMA di OGNI COLONNA (un lavoro compiuto da un solo uomo)

$$x_{ij} \geq 0$$

Con quali vincoli potrei avere x_{ij} anche reale pur soddisfacendoli: $\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ \ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ \ 0\ 0\ 1\ 0\ \ 0\ 0\ 0\ 1\right)$
Se il lavoro è divisibile va bene così, in caso contrario x_{ij} deve appartenere a $\mathbb{Z}$.
Supporremo ora di non avere $x \in \mathbb{Z}$.

- Problemi di **PROGRAMMAZIONE LINEARE** sono problemi di minimo o massimo di una funzione obiettivo lineare i cui vincoli sono lineari e hanno segno $\leq$ o $\geq$ o $=$.
Tutti i problemi di PL sono riconducibili in formato **STANDARD**:

① min → max facendo:

$$\min f = -\max(-f(x))$$

② $\geq \rightarrow \leq$ moltiplicando per -1

③ $= \rightarrow \begin{matrix}\leq \\ \geq\end{matrix}$ in caso di equazioni essi diventano un sistema di due disequazioni:

$$x_1 = a \quad \begin{cases} x_1 \leq a \\ x_1 \geq a \end{cases}$$

Tornando all'esempio visto all'inizio possiamo scrivere allora il formato standard:

$c = [22\ \ 18\ \ 20\ \ 16\ \ 14\ \ 20\ \ \dots\ \ 22\ \ 18]$ $\quad c \in \mathbb{R}^{16}$

$b = [1;\ -1;\ \dots\ ;\ 0;\ 0;\ 0;\ \dots\ 0]$ (alcune 1 tutte così) (in tutto 16)

Saranno 32 → 8 prima sommatoria (4 righe)
8 seconda " (4 colonne)
16 per $x_{ij} \geq 0$

$A \in \mathbb{R}^{32 \times 16}$

$A = [1, 0, \dots\ 0;\ -1, 0, \dots\ 0;\ 0, 1, 0\ \dots\ 0;\ \dots]$

IL COMANDO → "LINPROG"

Linprog risolve il seguente formato standard:

$c \in \mathbb{R}^n$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $b \in \mathbb{R}^m$
$A_{eq} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ $b_{eq} \in \mathbb{R}^k$
$LB, UB \in \mathbb{R}^n$

$$\min cx$$
$$Ax \leq b$$
$$A_{eq}x = b_{eq}$$
$$LB \leq x \leq UB$$

(valore minimo (lower bound) — valore massimo (upper bound))

Ha bisogno di 7 dati in ingresso

Si digita allora:

```
>> c = [
>> A = [ ...
>> Aeq = [ ...
   ↓
>> UB = [ ...

>> [x, v] = linprog(c, A, b, Aeq, beq, LB, UB)
```

Allora avremo $x =$ ☐ e $v =$ ☐ che è il valore ottimo del problema

x: soluzione ottima del problema

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Il formato di Linprog è **STANDARD**: risolve cioè tutti i problemi di PL.
Se per esempio non vi fossero equazioni: $A_{eq} = [\,]$

Per l'esempio visto avremo:

$c = [22 \;\; 18 \;\; 20 \;\; \dots \;\; 22 \;\; 18]$ $\quad \mathbb{R}^{16}$

$b = [\,]$

$A = [\,]$

$A_{eq} = [1\,0\,0\,0\,\underbrace{\dots}_{\dots 16 \text{ valori} \dots}\,0\,0;\; 0\,1\,0\,\dots]$ $\quad \mathbb{R}^{8\times 16}$

$b_{eq} = [1;1;1;1;1;1;1;1]$ $\quad \mathbb{R}^{8}$

$LB = [0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0]$ $\quad \mathbb{R}^{16}$

$UB = [\,]$, $0 \le x \le 1$ ma si ridondante perché le x sono ≥ 0 e la somma deve dare 1

LB mi evita di avere nella matrice A le condizioni $x_{ij} \ge 0$: è una matrice 16×16 in meno e in particolare essendo $-x_{ij} \le 0$ è la matrice $-I$ (identica).

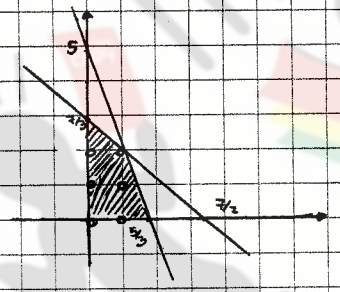
MASTER COPY
Tel. 388/9837745

STUDIO DI PL GEOMETRICAMENTE

$$\max\; 3x_1 + 5x_2 \qquad \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 7 \\ 3x_1 + x_2 \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Il numero di colonne sono il numero di prodotti, le righe di A invece ne sono una per ogni materia prima vincolata!
Disegniamo i vincoli:



La regione evidenziata è l'area delle soluzioni ammissibili. Se per esempio fosse un problema di PLI (intera) avrei i punti:

(0,0) (0,1) (0,2) (1,0) (1,1) (1,2)

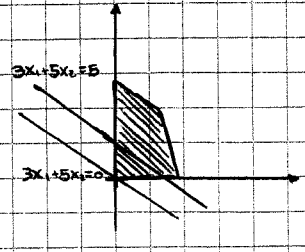
e tra questi cerco chi massimizza!

Si può notare che per ogni vincolo in genere avremo un lato del nostro poligono! Quindi avremo in A tante righe quanti sono i lati.
Geometricamente possiamo testare quanti vincoli vida un punto:

(-1,1) vincoli $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

(0,3) vincolo $2x_1 + 3x_2 \le 7$

e così via

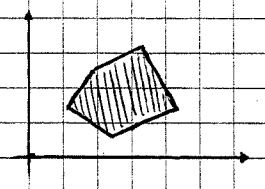


Notiamo una cosa:

disegniamo la retta $3x_1 + 5x_2 = 0$ che comprende i punti in cui la funz. obiettivo è zero.
Prendo allora la retta parallela passante per (0,1) dove quindi la funzione vale 5 e così via. Vedo che l'ultima retta via via parallela che rientra nel dominio è quella passante per il punto $(0, 7/3)$ e quindi $3x_1 + 5x_2 = 35/3$. Dato che la funzione è via via crescente, tale punto è quello che ma la massimizza.

TEOR. DI CARATTERIZZAZIONE ELEMENTARE E LINEE DI ISOCOSTO

Riprendiamo una rappresentazione geometrica di $Ax \leq b$



POLIEDRO $\Leftrightarrow$ coppia matrice-vettore A, b

DEFINIZ. 1:

Un **POLIEDRO** (cioè l'area ammissibile) non è altro che **L'INTERSEZIONE DI UN NUMERO FINITO DI SEMISPAZI CHIUSI** (nei problemi di PL non vi è il $\leq$ stretto).

- CHIUSI: la retta è inclusa ($\leq$)
- FINITO: perché deve soddisfare tutti i vincoli
- FINITO: tanti quanti i vincoli
- SEMISPAZI: semipiani nel caso di $\mathbb{R}^2$

Vi è il **TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE ELEMENTARE DI OTTIMALITÀ:**

- i punti che ottimizzano la funzione si trovano sulla frontiera del poliedro
- dati due punti di massimo (o minimo) x^1 e x^2, scriviamo il segmento con estremi i punti dati:

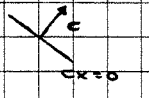
$$\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \qquad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

Se sono di massimo entrambi: $cx^1 = cx^2$ (valore della funzione in x^1 e in x^2)

calcoliamo la funzione: $c(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \Rightarrow \lambda cx^1 + (1-\lambda) cx^2 = cx^2 = cx^1$

Si vede che **TUTTI I PUNTI** del segmento di estremi i massimi sono anch'essi **PUNTI DI MASSIMO.**

Data la funzione cx, il gradiente è $c \neq 0$. La direzione di c è la direzione di massima ascesa. Se io disegno le rette ortogonali a c, insieme la funzione ha valore costante e per tale motivo si dicono **LINEE DI ISOCOSTO**. Il massimo della funzione si può individuare tracciando la parallela alla retta $cx = 0$ nel verso di c (if crucial), l'ultima retta che incontra nell'area ammissibile avrà il punto di massimo che sto cercando!



POLIEDRI

perché intersezione di insiemi convessi

Si è visto che un poliedro è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi. I poliedri sono:

- **CONVESSI** cioè due punti interni si possono collegare con un segmento di punti interni
- **NON HANNO SEZIONI TONDEGGIANTI** perché devono essere intersezione di un numero finito di semispazi.
- **CHIUSI** cioè contiene i punti di frontiera (deriva dal fatto che i vincoli son $\leq$ e $\geq$)

I poliedri non sono però tutti limitati e ciò spiega perché potremmo avere infiniti o nessun punto di massimo/minimo (se fossero chiusi e limitati avremmo un solo punto per il Teor. di Weierstrass).

Anche un punto è un poliedro:

$A = [-1\ 0;\ 0\ -1;\ 1\ 0;\ 0\ 1]$ è L'ORIGINE

$b = [0;\ 0;\ 0;\ 0]$

Prendiamo: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ $Ax \leq b$ è un poliedro perché deriva dal sistema!

continua