PROBLEMI E MODELLI DI PL

PRODUZIONE

Produzione di n oggetti, con m materie prime, date da una MATRICE DI COMPOSIZIONE A. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Nella matrice l'elemento a_{ij} è la quantità di materia prima i che serve per produrre l'oggetto j
c_j = GUADAGNO ottenuto vendendo l'oggetto j $\quad c \in \mathbb{R}^n$
b_i = DISPONIBILITÀ materia prima i $\quad b \in \mathbb{R}^m$
Si vuole determinare il PIANO DI PRODUZIONE OTTIMO

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{3} c_j x_i \\ \sum a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

DIETA

Si hanno a disposizione n CIBI contenenti m principi nutrizionali. Supponiamo di conoscere la quantità a_{ij} dell'i-esimo principio nutrizionale contenuto nel j-esimo cibo e il costo unitario c_j del j-esimo cibo. Si vuole determinare la DIETA GIORNALIERA che MINIMIZZI il COSTO TOTALE e rispetti il fabbisogno (piano nutriz. giornaliero b_i):

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{3} c_j x_i \\ \sum a_{ij} x_j \geq b_i \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

TEORIA DELLA PL

GEOMETRIA DELLA PL

INSIEME CONVESSO

Un sottinsieme $K \in \mathbb{R}^n$ si dice CONVESSO se comunque si scelgono due punti $x^1, x^2 \in K$ si ha

$$\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in K \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Se K contiene due punti x^1 e x^2, allora contiene anche TUTTO il segmento di estremi x^1 e x^2.

COMBINAZIONE CONVESSA

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice COMBINAZIONE CONVESSA di $x^1 .. x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono dei coefficienti $\lambda_1 .. \lambda_m$ tali che

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \qquad \lambda_i \in [0,1] \text{ per ogni } i \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

La combinazione convessa si dice PROPRIA se $0 < \lambda_i < 1 \ \forall i$.

INVOLUCRO CONVESSO

L'involucro convesso di un insieme K, denotato con $\mathrm{CONV}(K)$ è l'insieme di tutte le possibili combinazioni convesse di elementi di K.

$\mathrm{CONV}(K)$ è il più piccolo insieme convesso che contiene K, quindi un insieme convesso coincide con il suo involucro convesso.

CONO

Un sottinsieme $K \in \mathbb{R}^n$ si dice CONO se per ogni punto $x \in K$ e per ogni $\lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$.
Se K contiene un punto x diverso dall'origine, allora contiene anche tutta la semiretta uscente dall'origine passante per x.
(Un cono può essere convesso o non convesso)

COMBINAZIONE CONICA

Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si dice COMBINAZIONE CONICA di $x^1 .. x^m \in \mathbb{R}^n$ se esistono dei coefficienti $\lambda_1 .. \lambda_m$ tali che $\boxed{x = \sum \lambda_i x^i}$ $\lambda_i \geq 0 \ \forall i$

Si dice PROPRIA se $\lambda_i > 0 \ \forall i$

INVOLUCRO CONICO

L'involucro conico di un insieme K, denotato con cono (K), è l'insieme di tutte le possibili combinazioni coniche di elementi di K.

cono (K) è il più piccolo cono convesso che contiene K e che un insieme è un cono convesso se e solo se coincide con il suo involucro ~~convesso~~ conico.

POLIEDRI

Un semispazio chiuso in $\mathbb{R}^n$ può essere descritto algebricam. come l'insieme delle soluzioni di una DISEQUAZIONE LINEARE in n variabili.

$$\alpha^T x \leq \beta \qquad \text{dove } \alpha \in \mathbb{R}^n \text{ e } \beta \in \mathbb{R}$$

POLIEDRO

Un poliedro di $\mathbb{R}^n$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$.

Ogni poliedro P di $\mathbb{R}^n$ può essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema di m disequazioni lineari in n incognite

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad b \in \mathbb{R}^m$$

Un poliedro è un insieme convesso perché i semispazi chiusi sono insiemi convessi e l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso

CONO POLIEDRICO

Un poliedro che è anche cono si chiama cono poliedrico ed è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo di disequazioni lineari.

Esiste una matrice Q tale che: $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$

VERTICE

Un vertice di un poliedro è un punto che non si può esprimere come combinazione convessa propria di altri punti del poliedro.

L'insieme dei vertici del poliedro è denotato con Vert (P)

DIREZIONE DI RECESSIONE

Una direzione di recessione per un poliedro P è un vettore d tale che $\underline{x + \lambda d \in P}$ $\forall x \in P, \forall \lambda \geq 0$

Quindi d è una direzione di recessione se P contiene tutte le semirette di direzione d uscenti da punti appartenenti a P.

L'insieme delle direzioni di recessione è $rec(P)$

Teo: Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ allora $\boxed{rec(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}}$

Dato un poliedro P si ha che $P + rec(P) = P$

DIREZIONE DI LINEALITÀ

Una direzione di linealità per un poliedro P è un vettore d tale che $\underline{d \in rec(P)}$, $\underline{-d \in rec(P)}$

ossia d è una direzione di linealità se P contiene tutte le rette di direzione d passanti per i punti appartenenti a P.

L'insieme delle direzioni di linealità è $lineal(P)$

Teo: Se un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ allora $\boxed{lineal(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}}$

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DEI POLIEDRI

- l'involucro conico di un insieme finito di punti $\{e^1 .. e^p\}$ è un cono poliedrico, cioè esiste una matrice Q tale che $cono(e^1 .. e^p) = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$
- Un cono poliedrico $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ è l'involucro conico di un insieme finito dei suoi punti.

TEOREMA RAPPRESENTAZIONE POLIEDRI (TEO. DI WEYL)

Dato un poliedro P, esistono un sottinsieme finito $V = \{v^1 ... v^m\}$ di P ed un insieme finito $E = \{e^1 ... e^p\}$, eventualmente anche vuoti, tali che

$$\boxed{P = conv(V) + cono(E)}$$

Teo: Dato un poliedro P, esiste un sottinsieme finito V di P t.c.
$P = conv(V) + rec(P)$

Teo: Se P è un poliedro con $lineal(P) = \{0\}$, allora
$P = conv(vert(P)) + rec(P)$

→ Per ogni poliedro P non vuoto si ha che
$vert(P) \neq \emptyset \iff lineal(P) = \{0\}$

→ UN POLIEDRO LIMITATO È L'INVOLUCRO CONVESSO DEI VERTICI

→ SE IL POLIEDRO HA I VINCOLI DI NON NEGATIVITÀ SULLE VARIABILI, ALLORA $P = conv(vert(P)) + rec(P)$