RICERCA OPERATIVA 1-10-08

prof: Massimo Pappalardo

dipartimento di matematica applicata: Via Buonarroti (qui si tengono gli esami orali)

Ricevimento: MER 9:30 - 12:30 Dip. mat. app.

e-mail: pappalardo@dma.unipi.it 051 2213874

Libro: "Lezioni di Ricerca Operativa" Pappalardo, Manca, Passacantando edit: plus.

LEZIONE 1: 1- Introduzione - Nomenclatura
2- Forma standard di un problema di PL e riduzione a forma standard

NB: Ricordare da algebra

① Indip. lineare

② Prodotto Matrice

③ Sol. dei sistemi lineari (determinante)

④ Matrice inversa (2×2)

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Di cosa si occupa la ricerca operativa?

Il 95% la ricerca operativa studia problemi di ottimizzazione.

Vediamo meglio l'idea di cosa si occupa la ricerca operativa attraverso un esempio, di un problema di produzione industriale.

Problema di Ottimizzazione (produzione industriale)

Supponiamo di avere una ditta che produce 2 prodotti

A B
↓ ↓
3 5 ⇝ GUADAGNO

supponiamo che i prodotti per essere finiti devono passare nelle linee di 3 stabilimenti.

Impostiamo la tabella:

	n° di beni da produrre A	B	Disponibilità risorse
①	1 ora		4 ore alla settimana
②		2 ore	12 ore " "
③	3 ore	2 ore	18 ore " "

n° risorse utilizzate

Funzione Obiettivo: funzione che mi quantifica il guadagno

Soluzione Ammissibile: ipotetico piano produttivo che rispetta le risorse di produzione

Vincoli: funzioni che mi quantificano le limitazioni delle risorse di produzione

nel nostro esempio (2,1) è un piano di produzione ammissibile. Dunque per arrivare ad una soluzione (ottima) del problema bisogna impostare un algoritmo del tipo:

Variabili
↓
modello matematico del problema
↓
Risolvo

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Variabili: Quante variabili dobbiamo introdurre?

nel nostro esempio abbiamo 2 prodotti, quindi è ragionevole introdurre 2 variabili (x_A, x_B)

a questo punto, seguendo l'algoritmo di progettazione lineare, costruiamo un modello.

Modello:

$$\begin{cases} \max \boxed{3x_A + 5x_B} \longrightarrow \text{FUNZIONE OBIETTIVO} \quad c = [3, 5] \quad x = [x_A, x_B] \\ \boxed{\begin{array}{lll} 1x_A & & \leq 4 \\ & 2x_B & \leq 12 \\ 3x_A + & 2x_B & \leq 18 \end{array}} \longrightarrow \text{MATRICE} \\ x_A, x_B \geq 0 \quad \begin{cases} x_A \geq 0 \\ x_B \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_A \leq 0 \\ -x_B \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Esistono 3 tipologie analitiche di vincoli, sono tutte lineari:

- vincolo di $\leq$ minore uguale
- vincolo di $\geq$ maggiore uguale
- vincolo di $=$ uguale

modello matematico standard

$$\begin{cases} \max c \cdot x \longrightarrow \text{funzione obiettivo lineare} \\ A \cdot x \leq b \longrightarrow b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Oss: il modello è sviluppato tramite combinazioni lineari di vettori, questi vettori appartengono a spazi:

$x \in \mathbb{R}^n$

$b \in \mathbb{R}^m$ $\Rightarrow Ax \in \mathbb{R}^m$

$c \in \mathbb{R}^n$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

nel nostro esempio:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ A è una matrice 3×2, ~~ovviamente è un vettore~~ B

$x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$ x è un vettore

$A \cdot x$ è un vettore 3×1

Programmazione lineare: cercare il min o il max di una funzione lineare soggetta a vincoli tutti lineari

Per trasformare un qualunque problema di programmazione lineare in un modello standard si possono utilizzare 3 metodi:

① se c'è il vincolo di maggiore, moltiplichiamo tutto per -1 per cambiare il verso alla disuguaglianza

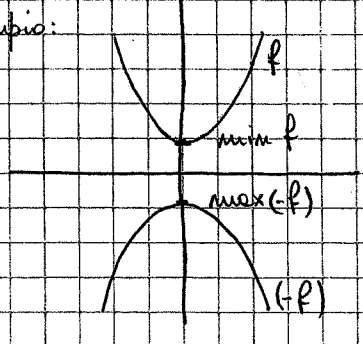
② $x_1 + x_2 = 5$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases}$

③ se c'è un problema di minimo $\min f$ esempio:

$\begin{cases} \min f = -\max(-f) \\ \text{punto di } \min f = \text{punto di } \max(-f) \end{cases}$



Esercizio:

$$\begin{cases} \min \; 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 \leq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5 \\ 5x_1 + 9x_3 \leq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \max \; -5x_1 + 6x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 \leq 8 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -5 \\ 5x_1 + 9x_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$c = \begin{bmatrix} -5, 6, -3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -7 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$m = 3$
$n = 3$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

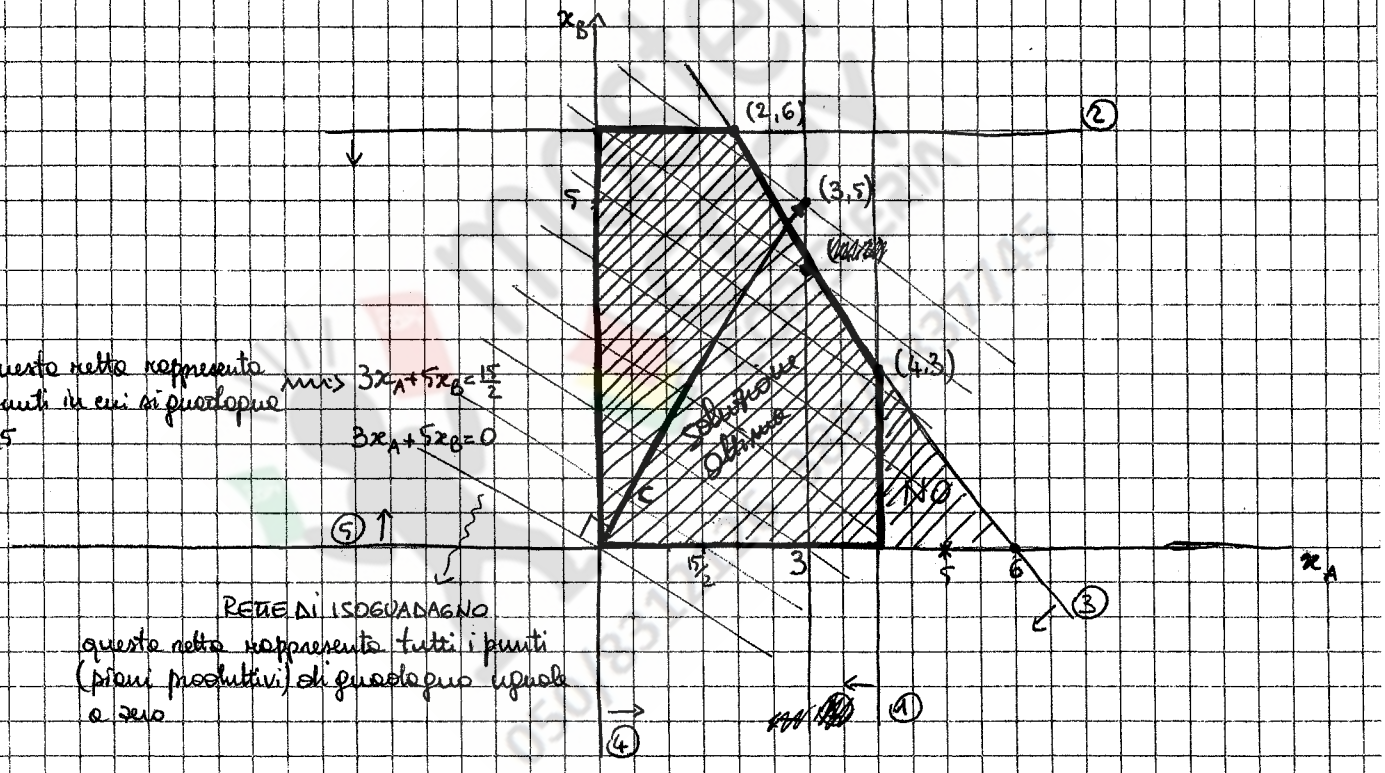
LEZIONE 2 : Risoluzione geometrica di un problema di PL in due variabili 6-10-08

$$\begin{cases} \max\ 3x_A + 5x_B & x_A, x_B \Rightarrow \text{variabili decisionali} \\ \text{①}\quad x_A \le 4 \\ \text{②}\quad 2x_B \le 12 \\ \text{③}\quad 3x_A + 2x_B \le 18 \\ \text{④}\quad x_A \ge 0 \\ \text{⑤}\quad x_B \ge 0 \end{cases}$$

In 3 variabili non si può risolvere in maniera geometrica ma solo in maniera analitica

Come si procede in maniera geometrica:

PASSO 1 disegnare il piano delle variabili decisionali



La soluzione ottima è (2,6) di valore ottimo 36, poichè $3(2)+5(6)=36$

la soluzione del sistema ②∩③ $\Rightarrow \begin{cases} 2x_B = 12 \\ 3x_A + 2x_B = 18 \end{cases}$

VARIABILI DI SCARTO : Supponiamo di prendere il piano produttivo (4,3), è meglio o peggio di (2,6)?

- Per verificare si sostituisce nella funzione ~~obiettivo~~ operativa: quindi la variabile di scarto del piano produttivo (4,3) è (0,6,0) ottenuto sostituendo i valori 4 e 3 nelle eq dei vincoli e sottraendo alle disponibilità di ogni materia prima.