TEORIA RICERCA OPERATIVA — PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

CAPITOLO 1. PROBLEMI e MODELLI di PL

Produzione → Problema massimizzazione

$$\begin{cases} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \forall i = 1 \dots m \\ x_j \ge 0 \quad \forall j = 1 \dots n \end{cases}$$

i = materia prima
j = oggetto

n = n° oggetti

m = n° materie prime

A = matrice di composizione (matrice tecnologica).

a_{ij} = quantità di materia prima i che serve per produrre l'oggetto j.

c_j = guadagno ottenuto vendendo l'oggetto j

b_i = disponibilità della materia prima i.

x_j = quantità produrre dell'oggetto j.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Funzione obiettivo. Trovare il piano produttivo che massimizzi il guadagno compatibilmente con i vincoli.

Quanto { posso / devo } produrre?

posso = anche zero

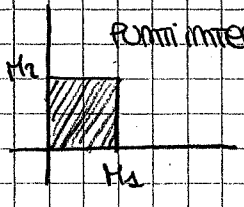
devo = per massimizzare i guadagni

Quanto posso al meglio.

Sol ammissibile = quanto posso.
Sol ottima = quanto devo per massimizzare.

I possibili piani di produzione sono ∞!

Beni { divisibili / indivisibili ⇒ Impensisco le unità di interezza $x \in \mathbb{Z}$.



La prima cosa da fare per creare un modello matematico è individuare le variabili.

1. Scegliere le variabili
2. Scrivere la funzione obiettivo
3. Vincoli massimizzazione

⇒ Guadagno additivo (proporzionale)
↳ sempre così a meno che non si dica

Identificazione dei dati.

P.P.L ⇒ Problema di programmazione lineare primale standard.

Programmazione → perché della forma è conforme.

Lineare → la funzione obiettivo è sempre lineare → $\langle a, x \rangle$
tutte le funzioni in basso sono lineari.

Standard → si può ricondurre sempre a questo modello c.x.

(Vettore 1 ≤ vettore 2 ⇔ lo è per ogni componente).

Dieta → Problema di minimizzazione

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

c_j → costo unitario del j-esimo cibo.

b_i → fabbisogno minimo giornaliero del principio nutrizionale i

m → principi nutrizionali

n → cibi

a_{ij}: i = principio nutrizionale, j = cibo.

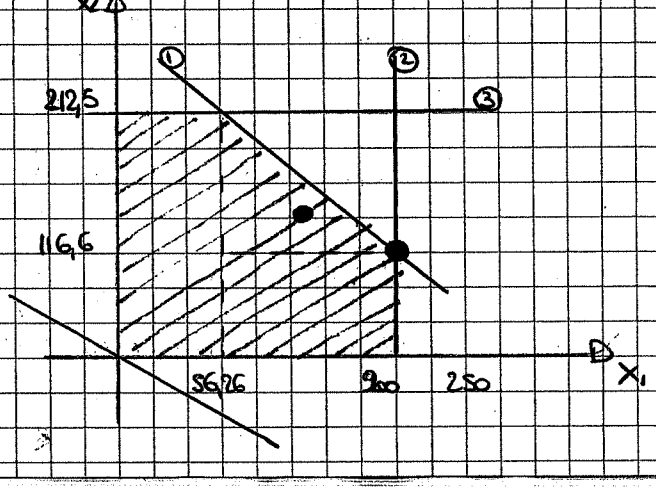
x_j → quantità j-esimo principio nutrizionale contenuta nel j-esimo cibo

Equivalenza (risolvere questi problemi) → $\begin{cases} \min cx \\ Ax \leq b \\ Aeq = beq \\ LB \leq x \leq UB \end{cases}$

Capitolo 2 Teoria della PL

Eq ⇒ Equivalenza

Interpretazione e risoluzione geometrica dei problemi di PL in due variabili.



MASTER COPY
Tel. 388/9837745

①②③ vincoli

② esempio di vincolo con e' uguale. Anche ③

//// = Regione ammissibile.

es.

$$\begin{cases} \max\ 7x_1 + 10x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 750 \\ 5x_1 \le 1000 \\ 2x_2 \le 425 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

→ Regione ammissibile = Tutti quegli punti per cui si può dire "si può".

$\subseteq \mathbb{R}^2$ (è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$)

Poliedro

Un poliedro di $\mathbb{R}^m$ è l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi di $\mathbb{R}^m$.

Ogni poliedro P di $\mathbb{R}^m$ può essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema di m disequazioni lineari in n variabili:

$P = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \le b\}$ dove A matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

Un poliedro è un insieme convesso perché i semispazi chiusi sono insiemi convessi e l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

Intersezione = Vuol dire che devono essere verificati tutti i vincoli.

N° finito = La matrice deve avere un numero finito di righe.

Semispazi = Sono tutte disequazioni lineari

Chiusi = tutti $\le$ ma non $<$.

La matrice che abbiamo nell'esempio è una 5x2. Cosa vuol sapere il programma dove compilare?

(c, A, b) $m + m + nm$ componenti

avevo in questo esempio $m = 2$, $m = 5$ quindi ne mostro componenti

ti servono $2 + 5 + (5)(2) = 17$ che sono i numeri dentro STRINGA.

STRINGA:

dentro STRINGA: [7, 10 / 2 3 5 0 0 2 1 0 1 0 / 7 5 0 1 0 0 4 2 5 0 0]

(m = c; matrice $m \times n$ = A; m = b)

$x_1 \ge 0 \to -x_1 \le 0$; $x_2 \ge 0 \to -x_2 \le 0$

⇒ Informazione di cui necessita il compilatore per creare la soluzione ottima.

Il computer mi restituisce 2 numeri, x1 e x2 (se il mio modello è costruito in maniera esatta) sono sicuri essere la soluzione ottima.

(250, 0) Potrebbe essere un piano produttivo? No, perché 250 è fuori dal grafico, infatti sostituendo nel sistema, il vincolo 1 sarebbe soddisfatto ma il vincolo 2 no perché $2500 \not\leq 1000$.

Discussione → che differenza c'è tra • e •? (Perché $\nabla = 0$ qui)
• È sicuramente migliore perché è un punto ammissibile e impone il gradiente di ammissibilità nel punto (MAX)
→ Un punto interno altrettanto manco può mai essere ottimo.
Perché se pure ammissibile è "basso" come valore sarà sempre una migliore!

Caratterizzazione elementare dell'ottimalità.

Cos'è l'interpretazione geometrica? (cosa devo imparare?)
→ Vincolo soddisfatto con $=$ o con $\leq$, vincolo ammissibile.
La soluzione ottima esiste sul Bordo ($\nexists \exists$)

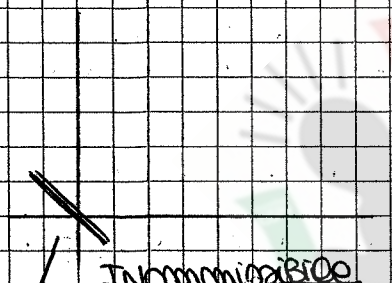
Il ∇ (gradiente) nel punto MAX è ammissibile.
$\nabla(cx) = c$
Il gradiente di cx è il vettore c (d'altra parte se ∇ è un vettore)
→ Quindi il gradiente non è ammissibile mai.

Dove mi sposterò per migliorare?

Si disegna la funzione obiettivo: $40x_1 + 100x_2 = 0$

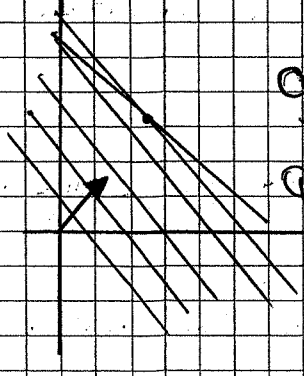
Metodo delle rette di livello.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745



INAMMISSIBILE
= tutti i piani produttivi in cui il guadagno è zero.

Problema di MAX = isoguadagno
Problema di MIN = isocosto



Cercherò max tra tutte quelle che intersecano il poliedro.

Quella più alta che interseca il poliedro in un solo punto.
L'ottimo, essendo questa è la mia ottima.



Vettore $\perp$ alle rette di isocosto / isoguadagno ?
(In questo caso è $C = (1, 10)$)
(quindi non è la bisettrice)

Trasformazioni equivalenti

Problema di PL → Problema di max o di minimo di una funzione lineare soggetta a vincoli lineari con $\geq \leq =$.

Un problema del tipo:

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases}$$

viene chiamato problema lineare in forma standard. Il valore ottimo del problema (P) verrà indicato con v(P)

3 "tipi":

Tipo N°1: tutti i problemi di minimo si possono vedere come problemi di massimo

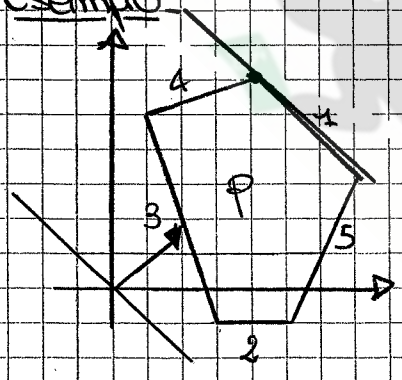
$$\max f(x) = -\min(-f(x)) \quad \text{per}$$

$$\min c^T x \to -\max -c^T x$$
↳ p.o

Tipo N°2: le disuguaglianze di $\geq$ si trasformano in quelle di $\leq$ moltiplicando per -1.

Tipo N°3: TECNICA DELLO SPEZZAMENTO DELLE DISEQUAZIONI.
Un vincolo di uguaglianza si può trasformare in due vincoli di disuguaglianza (uno di $\geq$ e uno di $\leq$) e di conseguenza quello di $\geq$ trasformandolo in $\leq$ moltiplicando per -1.

Esempio



P = Poliedro

Coppia A, b con:

A matrice $m \times n$, b vettore di $\mathbb{R}^m$

L'insieme delle soluzioni del sistema:

$$Ax \leq b$$

↓

Anche la regione ammissibile del problema di PL.

$n = 2$
$m = 5$

Funzione obiettivo è un problema di max.
Supponiamo la funzione obiettivo (2,3).
Devo disegnare la retta $2x_1 + 3x_2 = k = 0$

↳ disegno vettore 2,3 poi prendo la retta $\perp$.

Tutte le linee di livello sono le parallele. //
Va a crescere, infatti ie $\nabla = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è noi sappiamo che il gradiente punta verso la crescita.