RETTA $y = mx + q$

CIRCONFERENZA $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad C = (-a/2; -b/2)$

PARABOLA VERTICALE: $y = ax^2 + bx + c \quad V = (-b/2a; -\Delta/4a) \quad F = (-b/2a; 1-\Delta/4a)$

ORIZZONTALE: $x = ay^2 + by + c \quad V = (-\Delta/4a; -b/2a) \quad F = (1-\Delta/4a; -b/2a)$

ELLISSE FASSE X: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b \quad A = (\pm a; 0) \quad B = (0; \pm b) \quad F = (\pm c; 0) \quad c^2 = a^2 - b^2$

FASSE y: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a < b \quad A = (\pm a; 0) \quad B = (0; \pm b) \quad F = (0; \pm c) \quad c^2 = a^2 - b^2$

IPERBOLE FASSE X: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad A = (\pm a; 0) \quad F = (\pm c; 0) \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad AS: y = \pm b/a\,x$

FASSE y: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad B = (0; \pm b) \quad F = (0; \pm c) \quad AS: y = \pm b/a\,x$

IPERBOLE EQUILATERA FASSE X: $x^2 - y^2 = a^2 \quad a^2 = b^2 \quad A = (\pm a; 0) \quad F = (\pm a\sqrt{2}; 0) \quad AS: y = \pm x$

FASSE y: $x^2 - y^2 = -a^2 \quad B = (0; \pm a) \quad F = (0; \pm a\sqrt{2}) \quad AS: y = \pm x$

RIFERITA AGLI ASINTOTI: $xy = k \quad AS: y = 0 \quad x = 0 \quad k > 0 \quad A = (\pm\sqrt{k}; \pm\sqrt{k}) \quad F = (\pm\sqrt{2k}; \pm\sqrt{2k})$
$k < 0 \quad A = (\pm\sqrt{k}; \mp\sqrt{k}) \quad F = (\pm\sqrt{2k}; \mp\sqrt{2k})$

FUNZIONE OMOGRAFICA $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad O = (-d/c; a/c) \quad AS: x = -d/c \quad y = a/c \quad k = \frac{bc - ad}{c^2}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master COPY COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

③ PROBLEMA DI PRODUZIONE PL

Un'azienda produce due tipi di dolce, per cui servono mandorle e noci. Vuole massimizzare il guadagno

A → kg di quintale — MANDORLE 48 kg
B → kg di quintale — NOCI 15 kg

	A	B
MATRICE TECNOLOGICA	12 kg M	5 kg M (per fare un quintale)
	1 kg N	5 kg N

↳ quanto ci vuole della materia prima per fare i prodotti finiti

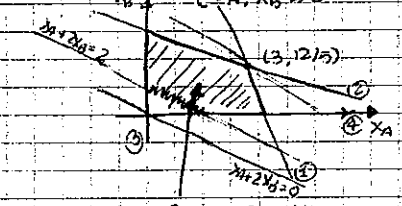
0. dati
1. variabile decisionale x_A quintali di dolce A da produrre; x_B quintali di dolce B da produrre
2. Funzione obiettivo in vincoli
3. modello
4. negativo
5. perdita di guadagno

MODELLO → se il primo prodotto diventa un primo

$$\begin{cases} \max 1000x_A + 1000x_B \to x_A + x_B \\ 12x_A + 5x_B \le 48 \\ x_A + 5x_B \le 15 \\ x_A, x_B \ge 0 \end{cases}$$

1 $12x_A + 5x_B = 48$ 3 $x_A = 0$
2 $x_A + 5x_B = 15$ 4 $x_B = 0$

```
>> c=[1 1]
>> A=[12 5; 1 5]
>> b=[48; 15]
>> Aeq=[]
>> beq=[]
>> lb=[0;0]
>> ub=[]
```



Non si prendono le x minori di 0: ATTENZIONE AI VINCOLI !!

(3, 12/5) è la soluzione ottima

REGIONE AMMISSIBILE (insieme delle soluzioni ammissibili)

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

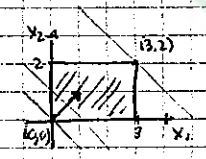
$c \in \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\max cx$ $Ax \le b$ → **PROGRAMMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE**
(problema in cui si minimizza o massimizza una funzione obiettivo lineare (una variabile) soggetta a vincoli lineari ($\le = \ge$))

↳ è il gradiente della funzione obiettivo
→ all'interno di cui si possono essere punti di minimo e massimo (teorema di Weierstrass e di Fermat)

IDENTIFICAZIONE DEI DATI: $n=2$ $m=4$ $c=(1,2)$ $b=\begin{pmatrix}48\\15\\0\\0\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}12&5\\1&5\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $x=\begin{pmatrix}x_A\\x_B\end{pmatrix}$

TRICKS:
1. $\le$ e $\ge$ sono la stessa cosa (si moltiplica per -1)
2. $=$ è la combinazione tra $\ge$ e $\le$
3. $\min f(x) = -\max[-f(x)]$ ovunque ρ = punto di minimo, p = punto di massimo, f)

RISOLUZIONE GEOMETRICA DI PROBLEMI DI PL IN $\mathbb{R}^2$ $x_A + 2x_B = 0$ → **RETTE DI LIVELLO (ORIGINARIA)** → i punti che stanno nella regione ammissibile hanno tutti la stessa soluzione:
$= k$
$(1,2)\begin{pmatrix}x_A\\x_B\end{pmatrix} = 0$ ⇓
c x
può coincidere a c ⇒ si prende l'ultima retta che ci può passare con la regione ammissibile



$C=(1,1)$ $\min(0,0)$
$\max(3,2)$

REGIONE AMMISSIBILE DI UN PROBLEMA DI PL → POLITOPO ↳ limitato e illimitato a vuoto $Ax \le b$ (intersezione di un numero finito di semispazi chiusi)
↳ $n+m$ → numero che ci vogliono per definire la regione ammissibile

COMBINAZIONE CONVESSA $x^1 \dots x^k \in \mathbb{R}^n$, $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ $\lambda \in [0,1]$ $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

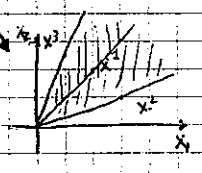
CONV$\{x^1 \dots x^k\}$ INVILUPPO CONVESSO DEI PUNTI (più piccolo insieme convesso che contiene i punti)

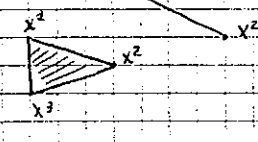
COMBINAZIONE CONICA $x^1 \dots x^k \in \mathbb{R}^n$, $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ $\lambda_i \ge 0$

CONE$\{x^1 \dots x^k\}$ INVILUPPO CONICO DEI PUNTI (più piccolo cono convesso che contiene i k punti)
↳ insieme caratterizzato dal fatto che se ci sta un punto, ci sta tutta $x \in C = \{\lambda x \in C \ \forall \lambda \ge 0\}$

$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \to \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$

$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3$





MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

LINPROG risolve problemi di programmazione lineare $\begin{cases} \min cx \\ Ax \le b \\ A_{eq}x = b_{eq} \\ \angle B \le x \le UB \end{cases}$

```
>> c = [1 1]
>> A = [0 1; 2 1]      >> A = [2 1]
>> b = [1;4]           >> b = [4]
>> Aeq = []
>> beq = []
>> LB = []
>> UB = []             >> UB = [ ; 1]
>> linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB,UB)
```

$\Downarrow$

$\begin{cases} \min\ x_1 + x_2 \\ x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

TEOREMA DI WEYL (DI RAPPRESENTAZIONE DEI POLIEDRI) $P = (Ax \le b) \Rightarrow \exists V = \{v^1 \dots v^n\} \subset P,\ \exists E = \{e^1 \dots e^m\} : P = \text{conv}V \oplus \text{cone}E$

(ottiene di tutti e possibili semplici vettori)



$E = \{(1,0)\}$

$V^1\ V^2\ V^3\ V^4\ e^1$

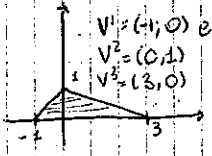


$V^1 = (0,0)$
$e^1 = (1,0)$
$e^2 = (0,1)$

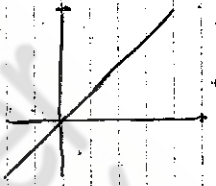
(tutti i punti del poliedro sono dati dalla somma di un punto del cono e un punto del conv)



$V^1 = (0,1)$
$V^2 = (0,0)$
$e^1 = (1,0)$
$e^2 = (1,1)$



$V^1 = (-1,0)\ e^1 = (0,0)$
$V^2 = (0,1)$
$V^3 = (3,0)$



$V^1 = (0,0)$
$e^1 = (1,1)$
$e^2 = (-1,-1)$

② PROBLEMA DI ASSEGNAMENTO

	1	2	3	4
1	16	14	18	21
2	20	21	19	17
3	14	20	16	18
4	21	23	24	19

$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ non va a } j \\ 1 & \text{se } i \text{ va a } j \end{cases}$ $\quad x = (\dots)$ 16 componenti

$$\begin{cases} \min cx \\ [x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1] \ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1 \dots 4 \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1 \dots 4 \\ x_{ij} \ge 0 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \rightarrow \text{non si può dividere (non si può mettere su linprog)} \end{cases}$$

↳ in vincoli di uguaglianza

```
>> c = [16 14 18 21 20 21 19 17 14 20 16 18 21 23 24 19]
>> Aeq = [1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0;
          0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;
          0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0;
          0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1;
          1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
          0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
          0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;
          0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1]
>> beq = [1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1]
>> A = []
>> b = []
>> LB = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0]
>> UB = []
```

ORDINE LESSICOGRAFICO DELLE PERMUTAZIONI → quando una sequenza non può mutare si ordinano in ordine crescente della prima e a parità della prima in ordine crescente della seconda e così via.

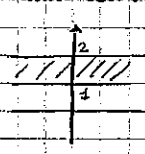
- $E = \{(1,0)\} \Rightarrow P = \text{conv}V$
1. $E \Rightarrow \{(1,0)\} \Rightarrow P$ illimitato (E rappresenta le **direzioni di recessione**, quelle con cui il poliedro va all'infinito)
2. L'intersezione di chiusi è chiusa $\Rightarrow$ **P chiuso**
3. L'intersezione di convessi è convessa $\Rightarrow$ **P convesso**
4. **VERTICE DI UN POLIEDRO** un punto del poliedro che **non si può esprimere come combinazione convessa, diversi punti del poliedro con tutti coefficienti λ diversi da 1** (non sta all'interno di un segmento tutto contenuto nel poliedro)

Se il poliedro ha vertici $V = \{v^1 \dots v^n\}$ (e insieme dei vertici P nessun vertice può essere tolto da V)

$\text{conv}V = \text{conv}(\text{Vert}P)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

5. Proposta: Sono vettori che sono quelli che hanno direzione retta, coerenza, stesso modulo (lunghezza della freccia) e verso (freccia) → è retta, la stessa e i semipiani



$V^1 = (0,1)$
$V^2 = (0,2)$
$e^1 = (1,0)$
$e^2 = (-1,0)$

- TEOREMA FONDAMENTALE DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE (P) ⇒ ① $P=\phi$ ② $(P)=+\infty$ ③ $\exists x: \max_{x\in P} cx = cv^c$

$$\begin{cases} \max cx \\ Ax \le b \end{cases} \quad (P)$$ PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE PENALE STANDARD

$x \in P \quad x = \sum_{i=1}^{v} \lambda_i v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j e^j$ ⇒ dati $\quad cx = c\left(\sum_{i=1}^{v} \lambda_i v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j e^j\right) = \sum_{i=1}^{v} \lambda_i (cv^i) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j (ce^j)$

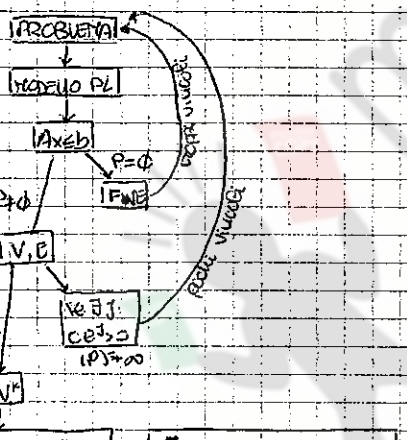
$$\max_{x\in P} cx = \max_{\substack{\lambda_i \ge 0 \\ \sum \lambda_i = 1 \\ \mu_j \ge 0}} \left(\sum_{i=1}^{v} \lambda_i (cv^i) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j (ce^j)\right) = \max_{\substack{\lambda_i \ge 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \left(\sum_{i=1}^{v} \lambda_i (cv^i)\right) + \max_{\mu_j \ge 0} \left(\sum_{j=1}^{p} \mu_j (ce^j)\right)$$

Se $\exists j: ce^j > 0 \Rightarrow (P) = +\infty$
↳ basta che ci sia un prodotto scalare per cui viene fuori uno positivo

Se $\forall j: ce^j \le 0 \Rightarrow \max_{x\in P} cx = \max_{\mu_j \ge 0} \left(\sum_{j=1}^{p} \mu_j (ce^j)\right) = 0 \Rightarrow \max_{x\in P} cx = \max_{\substack{\lambda_i \ge 0 \\ \sum \lambda_i = 1}} \left(\sum_{i=1}^{v} \lambda_i (cv^i)\right) \le \max_{\lambda} (\lambda_1 (cv^1) + \dots + \lambda_k (cv^k))$

$\max cv^c = cv^c$ $\quad \le \lambda_1 cv^c + \dots + \lambda_k cv^c = cv^c(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) = cv^c \le \max_{x\in P} cx$

$$\max_{x\in P} cx \le cv^c \le \max_{x\in P} cx \Rightarrow \max_{x\in P} cx = cv^c$$



$\max cv^c$ è cv^c-ottimo → v^c è la soluzione ottima, cv^c è il valore ottimo

- A una (m×n) BASE una $B \subset \{1,\dots,m\}: |B| = n$; $\det A_B \ne 0$; $A_B x = b_B \Rightarrow \bar{x} = A_B^{-1} b_B$
↳ INSIEME DI BASE ↳ MATRICE DI BASE ↳ SOLUZIONE DI BASE PRIMALE
(soddisfa due vincoli con = uguale, vè i vincoli di intersecano)

la soluzione di base si dice AMMISSIBILE se soddisfa tutti i vincoli (anche quelli poliedro)
DEGENERE se soddisfa due uguaglianze più di n vincoli, NON DEGENERE altrimenti
↳ non è detto che sia data da vincoli superflui

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 4x_1 + x_2 \le 5 \\ x \ge 0 \quad -x_1 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \end{cases}$$

B	x	A	D
3,4	(0,0)	SI	NO
-1,3	(0,2)	SI	NO

$2x_1 + 3x_2 = 6 \quad x_2 = 2$
$-x_1 + 0x_2 = 0 \quad x_1 = 0$

$\binom{m}{n}$ → numero di possibili basi

- A $m\times n$ $y \in \mathbb{R}^m$ $c \in \mathbb{R}^n \Rightarrow yA = c$ $y \ge 0$ (RISOLVIBILE)

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 + y_4 = 1 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases} \quad u_1 = 4 \quad u_2 = 2 \quad (y_1, y_2, y_3, y_4) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \le (1,3)$$

$y \ge 0$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745