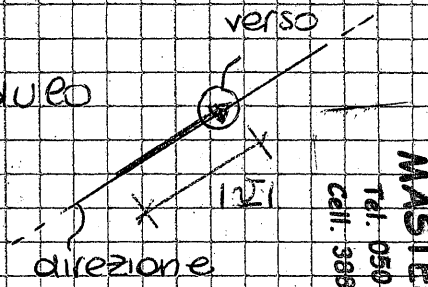
Lez. del 5-03-2018

PRELIMINARI di ALGEBRA

DEF: vettore Consideriamo uno spazio vettoriale $U = \mathbb{R}^3$.
Un VETTORE è un'entità caratterizzata da:
- direzione
- verso
- intensità o modulo $|\underline{v}|$



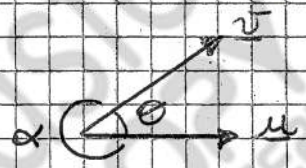
E lo si indica con $\underline{v}$.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9937745

Operazioni tra vettori

- prodotto scalare

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cos\theta$$



$\theta = 2\pi - \alpha$

Se $\underline{u}$ è un VETTORE UNITARIO, cioè se $|\underline{u}| = 1$

$\underline{v} \cdot \underline{u} = |\underline{v}| \cos\theta$ ⇓ che significa che il prodotto scalare rappresenta la proiezione del vettore $\underline{v}$ lungo la direzione del vettore $\underline{u}$

- prodotto vettore

$\underline{u} \wedge \underline{v}$ → si ottiene un vettore con:
- DIREZIONE → appartenente al piano generato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$
- VERSO → ricavabile mediante la regola della mano destra
- INTENSITÀ → pari all'area del parallelogramma generato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

DEF: BASE Insieme di VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI che COMBINATI LINEARMENTE tra di loro generano TUTTO lo SPAZIO VETTORIALE

Se indichiamo i vettori della base con $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ e $\underline{b}_3$

Allora un qualsiasi vettore $\underline{v}$ dello spazio vettoriale può essere scritto in MODO UNICO come

$$\underline{v} = v_1 \underline{b}_1 + v_2 \underline{b}_2 + v_3 \underline{b}_3 = \underline{v}_i \underline{b}_i$$

se ripeto 2 VOLTE lo STESSO indice significa SOMMATORIA

Tra tutte le possibili basi di uno spazio vettoriale noi andremo a scegliere una

BASE ORTONORMALE : base costituita da vettori aventi NORMA UNITARIA e ORTOGONALI tra di loro, cioè $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$

Dal momento che l'insieme di vettori $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ ed $\underline{e}_3$ forma una BASE (per di più ORTONORMALE) posso scrivere:

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3 = v_i \underline{e}_i$$

Dato $\underline{v}$ ottengo quindi che ad esso è associata una TERNA DI NUMERI v_1, v_2 e v_3.

Se adesso scelgo un'altra base formata dai vettori $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$, posso scrivere:

$$\underline{v} = \tilde{v}_1 \tilde{\underline{e}}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{\underline{e}}_2 + \tilde{v}_3 \tilde{\underline{e}}_3 = \tilde{v}_i \tilde{\underline{e}}_i$$

Questa base mi associa a $\underline{v}$ un'altra TERNA DI NUMERI $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ e $\tilde{v}_3$.

PRELIMINARI DI ALGEBRA DEI TENSORI

DEF: TENSORE DEL SECOND'ORDINE

Un TENSORE DEL SECOND'ORDINE $\underline{A}$ può definirsi come un'APPLICAZIONE O TRASFORMAZIONE LINEARE dello SPAZIO VETTORIALE $\mathcal{V}$ in se stesso cioè come una LEGGE

$\underline{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tale che $\underline{A}(\alpha \underline{u} + \beta \underline{v}) = \alpha \underline{A}(\underline{u}) + \beta \underline{A}(\underline{v})$

- TENSORE ZERO : si indica con $\underline{0}$ ed è un tensore che trasforma ogni vettore nel VETTORE NULLO:

$$\underline{0}\,\underline{a} = \underline{0}$$

- TENSORE IDENTITÀ : si indica con $\underline{I}$ ed è un tensore che trasforma ogni vettore in se stesso:

$$\underline{I}\,\underline{a} = \underline{a}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

L'APPLICAZIONE LINEARE non è una matrice, ma una volta fissata una base possiamo trattarla come tale:

$$\underline{A}(\underline{v}) = \underline{A}(v_i \underline{e}_i) = v_i \underline{A}(\underline{e}_j)$$

↑ Sfruttando la LINEARITÀ dell'OPERATORE $\underline{A}$ possiamo portare fuori gli scalari

Dal momento che $\underline{A}(\underline{v})$ è un vettore, possiamo calcolarci la componente j-esima

$$(\underline{A}(\underline{v}))_j = \underline{e}_j \cdot \underline{A}(\underline{v}) = \underline{e}_j \cdot \underline{A}(v_i \underline{e}_i) = v_i \underbrace{\underline{e}_j \cdot \underline{A}(\underline{e}_i)}_{\downarrow A_{ji}} = A_{ji} v_i$$

Da cui si ricava che data un'APPLICAZIONE LINEARE $\underline{A}$ ed una BASE, a tale applicazione possiamo associare una MATRICE di componenti A_{ji} che è chiamata MATRICE ASSOCIATA ad $\underline{A}$ in quella fissata BASE.

DEF: TENSORE TRASPOSTO

Ad ogni tensore $\underline{A}$ corrisponde un UNICO tensore $\underline{A}^T$ tale che, comunque si scelgano i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$, si abbia:

$$(\underline{A}\underline{v}) \cdot \underline{u} = (\underline{A}^T \underline{u}) \cdot \underline{v}$$

dove il $\cdot$ sta ad indicare il prodotto scalare o interno tra vettori.
$\underline{A}^T$ si chiama TRASPOSTO di $\underline{A}$.

Se adesso voglio calcolarmi la componente "ij" di A^T:

$$A^T{}_{ij} = \underline{e}_i \cdot (\underline{A}^T \underline{e}_j) = (\underline{A}\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_j = A_{ji}$$

TENSORE SIMMETRICO: $\underline{A}$ è un tensore simmetrico cioè $\underline{A} \in Sym$ se

$$\underline{A} = \underline{A}^T \Rightarrow A_{ij} = A_{ji}$$

TENSORE ASIMMETRICO: $\underline{A}$ è un TENSORE ASIMMETRICO cioè $\underline{A} \in Skw$ se

$$\underline{A} = -\underline{A}^T \Rightarrow A_{ij} = -A_{ji}$$

* ESERCIZI * 1

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9937745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
cell. 388 9837745

teorema fondamentale: Ogni tensore $\underline{A}$ può essere scritto in maniera univoca come la SOMMA di un TENSORE SIMMETRICO con uno EMISIMMETRICO.

Il teorema ci dice anche che questa scomposizione è UNICA, ovvero che non esistono altri 2 TENSORI (uno simmetrico e l'altro emisimmetrico) che sommati tra di loro mi danno $\underline{A}$.

Questi 2 TENSORI possono essere definiti utilizzando queste relazioni:

- $\text{sym}\,\underline{A} = \frac{\underline{A}+\underline{A}^T}{2}$ → operatore SIMMETRICO che mi dà una MATRICE SIMMETRICA
- $\text{skw}\,\underline{A} = \frac{\underline{A}-\underline{A}^T}{2}$ → operatore EMISIMMETRICO che mi dà una MATRICE ANTISIMMETRICA.

Dunque $\underline{A} = \text{sym}\,\underline{A} + \text{skw}\,\underline{A}$

dimostrazione: vogliamo dimostrare che questa SCOMPOSIZIONE È UNICA

Per farlo prendiamo 2 SOLUZIONI: $\underline{A} = \underline{S} + \underline{W}$

$\underline{A} = \tilde{\underline{S}} + \tilde{\underline{W}}$

con $\underline{S}$ e $\tilde{\underline{S}}$ ∈ sym e $\underline{W}$ e $\tilde{\underline{W}}$ ∈ skw e dimostriamo che sono UGUALI TRA DI LORO: $\underline{S} + \underline{W} = \tilde{\underline{S}} + \tilde{\underline{W}}$

$$\underline{S} + \underline{W} = \tilde{\underline{S}} + \tilde{\underline{W}} \Rightarrow \underline{S} - \tilde{\underline{S}} = \underline{W} - \tilde{\underline{W}} \Rightarrow \hat{\underline{S}} = \hat{\underline{W}}$$

con $\hat{\underline{S}} = \underline{S} - \tilde{\underline{S}}$ ∈ sym

$\hat{\underline{W}} = \underline{W} - \tilde{\underline{W}}$ ∈ skw

Adesso ci chiediamo se sia possibile che una matrice simmetrica sia uguale ad una emisimmetrica.
La risposta è (SI), basta che siano entrambe NULLE.
Verifichiamolo:

$$\hat{\underline{S}} = \hat{\underline{S}}^T = \hat{\underline{W}}^T = -\hat{\underline{W}} = -\hat{\underline{S}} \Rightarrow \hat{\underline{S}} = -\hat{\underline{S}} \Rightarrow 2\hat{\underline{S}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{S}} = \underline{0} \Rightarrow \hat{\underline{W}} = \underline{0} \quad \text{ok}$$

E quindi abbiamo dimostrato l'UNICITÀ DELLA SCOMPOSIZIONE.

prodotto tensore diade: prodotto diadico

Dati due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ il loro PRODOTTO DIADICO ovvero la loro DIADE si indica nel seguente modo: $\underline{u} \otimes \underline{v}$

Il prodotto diadico tra 2 vettori COSTITUISCE un'applicazione lineare o meglio un tensore del 2° ordine:

$\underline{u} \otimes \underline{v} : V \to V$ tale che $\underline{u} \otimes \underline{v} \cdot \underline{a} = \underline{u}(\underline{v} \cdot \underline{a}) = \underline{u}\underline{v} \cdot \underline{a} \quad \forall \underline{a}$

* ESERCIZI * 2

Esempio:

Consideriamo un tensore $\underline{A}$ le cui componenti sono date da $A_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{A}\,\underline{e}_j$

Con queste componenti andiamo a definire un' ALTRO TENSORE, fatto in questo modo:

$\tilde{\underline{A}} = A_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \to$ 2 VOLTE gli indici "i" e "j" = D c'è sommatoria sia in "i" che in "j" (in questa relazione compaiono)

(?) c'è differenza tra $\underline{A}$ e $\tilde{\underline{A}}$

RISPOSTA: NO $\Rightarrow \underline{A} = \tilde{\underline{A}}$

dimostrazione: Sappiamo che 2 applicazioni lineari $\underline{A}$ e $\tilde{\underline{A}}$ sono uguali tra di loro se preso un vettore $\underline{v}$ qualsiasi, lo mandano nello STESSO VETTORE

Consideriamo il generico vettore: $\underline{v} = v_i \underline{e}_i$

Sappiamo che:

- $\underline{A}\underline{v} = v_i \underline{A}\,\underline{e}_i$
- $\tilde{\underline{A}}\underline{v} = A_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j (v_k \underline{e}_k) = v_k A_{ij} \underline{e}_i \underbrace{(\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k)}_{\delta_{jk}} = v_k A_{ij} \underline{e}_i \delta_{jk} = v_j A_{ij} \underline{e}_i$

dove $v_k \delta_{jk} = v_j$ perché facendo la sommatoria su "k" sopravvivono solo i termini con $k = j$. perché $\delta_{jk} \neq 0 \Leftrightarrow k = j$.

Dal momento che sia $\underline{A}\underline{v}$ che $\tilde{\underline{A}}\underline{v}$ sono vettori, per dimostrare che questi 2 vettori sono uguali tra di loro bisogna verificare che

MASTER CO Tel. 050 831 2 Cell. 388 9837