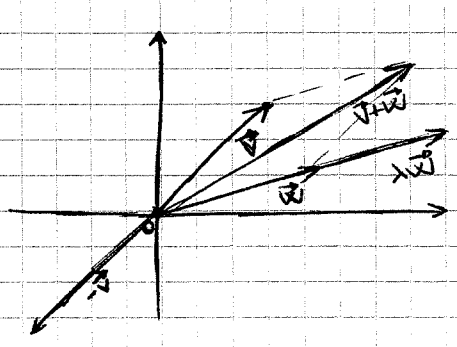
1- Spazio vettoriale (reale)



MASTER COPY

Tel. 388/9837745

1) $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$

2) $(\vec{v}+\vec{w})+\vec{u} = \vec{u}+(\vec{w}+\vec{v})$

3) $\exists 0 \quad 0+\vec{v}=\vec{v}$

4) Per $\vec{v} \quad \exists -\vec{v} \quad \vec{v}+(-\vec{v})=0$

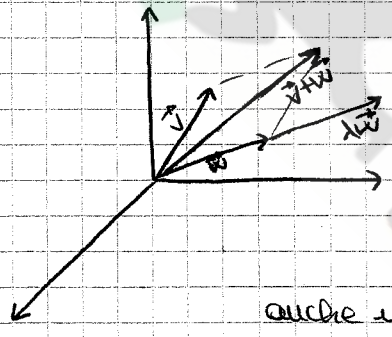
5) $\lambda(\vec{v}+\vec{w}) = \lambda\vec{v}+\lambda\vec{w}$

6) $(\lambda+\mu)\vec{v} = \lambda\vec{v}+\mu\vec{v}$

7) $(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$

8) $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$; $\underset{\uparrow}{0}\cdot\vec{v}=0$
=L'ORIGINE

Queste proprietà ci dicono tutto quello che dobbiamo sapere sui vettori su un piano cartesiano.



SPAZIO CARTESIANO

anche nello spazio valgono le stesse proprietà

Le 8 proprietà sono vere a prescindere dal fatto se parliamo dello spazio o del piano.

SPAZIO CARTESIANO e PIANO CARTESIANO hanno come proprietà comune:

- LE COORDINATE

SPAZIO VETTORIALE (definizione)

Uno spazio vettoriale reale è un insieme V con due operazioni:

1) "+", ovvero una funzione
$$V \times V \to V \text{ (somma)}$$
2) "$\cdot$", funzione $\mathbb{R} \times V \to V$

soddisfacenti le seguenti proprietà:

1) $\forall v, w \in V \quad v+w = w+v$
2) $\forall v, w, u \in V \quad (v+w)+u = v+(w+u)$
3) $\exists 0 \in V$ t.c. $\boxed{\forall v \in V \quad v+0=v}$ ← DEFINIZIONE DELLO 0
4) $\forall v \in V \ \exists (-v) \in V$ t.c. $\boxed{v+(-v)=0}$ ← DEFINIZIONE DELL'OPPOSTO
5) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall v, w \in V \quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall v \in V \quad (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \forall v \in V \quad (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
8) $\forall v \in V \quad 1v = v \qquad \underset{\in \mathbb{R}}{0} \cdot v = \underset{\in V}{0}$

2- NUOVI ESEMPI DI SPAZI VETTORIALI

→ $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$, lo zero di $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

→ $\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

→ $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$ ← È UNO SPAZIO VETTORIALE

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x^n+y^n \end{pmatrix} ; \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x^n \end{pmatrix}$$

(2.1) $\mathbb{R}^n$ sopra

(2.2) $\mathbb{R}[x]$ = lo spazio dei polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$$

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \dots + \lambda a_k x^k$$

Se $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_k x^k$

se i 2 polinomi sono di = grado $\Rightarrow$ $p(x) + q(x) = a_0+b_0 + (a_1+b_1)x + \dots$

$\dots + (a_k + b_k)x^k$

OSSERVAZIONE: $\mathbb{R}[x]$ è uno spazio vettoriale

3- MATRICI

posto(1;2)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ posto(2;3)

rettangolare

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ← non è una matrice

MATRICE GENERICA:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}, a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

2 indici: 1° = N° DI RIGA, 2° = N° di COLONNA

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$m \times n$ = TAGLIA DELLA MATRICE (A)

(m: N° DI RIGA, n: N° DI COLONNA)

posto (i, J) = coefficiente al posto $(i; J)$ di A = $(A)_{iJ}$

(RIGA, COLONNA; in simbolo)

Siano A, B due matrici di taglia $m \times n$

→ $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$

→ $(\lambda A)_{ij} = \lambda (A)_{ij}$

ESEMPI:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\pi & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE: la somma è definita solo tra le matrici della stessa taglia.

AFFERMAZIONE: l'insieme delle matrici di taglia $m \times n$ con le operazioni della somma e del prodotto per numero è uno SPAZIO VETTORIALE.

NOTAZIONE: questo spazio vettoriale si denota con $M_{m \times n}(\mathbb{R})$

4- PRODOTTO TRA MATRICE

→ Se vogliamo fare il prodotto tra A e B dobbiamo dire se è AB oppure è BA.

→ Perché AB sia definito bisogna avere # colonne di A = # righe di B.

→ PRODOTTO righe per colonne.

$$(a_1, a_2, \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

DEFINIZIONE: Siano (A una matrice $m \times k$) $A \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Allora $AB \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e

$(AB)_{ij}$ = prodotto tra la riga i-esima di A per la colonna j-esima di B.

$$= (A)_{i1}(B)_{1j} + (A)_{i2}(B)_{2j} + \dots + (A)_{ik}(B)_{kj}$$

$$= \sum_{p=1}^{k} (A)_{ip}(B)_{pj}$$

ESEMPIO:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{matrix} 1-6-4 = -9 \\ 0+6-1 = 5 \\ 0-3+12 = 9 \\ 0+3+3 = 6 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$