ALGEBRA LINEARE

FUNZIONE — relazione che associa ad **OGNI** elemento di X **UNO E UN SOLO** elemento di Y

- 3 componenti: X, Y, regola
- 3 tipi:
  - **INIETTIVA** elementi distinti di X hanno immagini distinte in Y
    (manda punti diversi in punti diversi)
  - **SURIETTIVA** ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X
  - **BIETTIVA** iniettiva + suriettiva

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$\mathbb{N}$ → insieme dei numeri naturali → $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

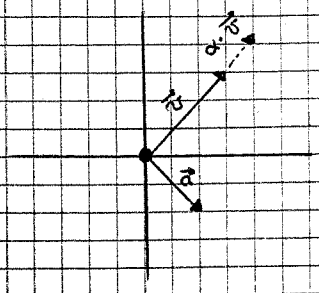
↳ gode delle proprietà della somma

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n+0=0$
- $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n+m = m+n$
- $\forall m, m, k \in \mathbb{N} \quad (m+m)+k = n+(m+k)$
- $n+x=0$ → l'equazione non ha soluzione in $\mathbb{N}$ tranne che per $n=0 \to x=0$

↓

allora insieme $\mathbb{Z}$

SPAZIO VETTORIALE



MASTER COPY

Tel. 388/9837745

1) SCELTA DI UN PUNTO DI VISTA : vettori che hanno come origine il punto (0;0)

2) OSSERVIAMO CHE: • si possono sommare fra loro
• si possono moltiplicare per un numero d

3) PROPRIETÀ : ci sono già
es: non importa l'ordine nella somma

↓

CREAZIONE DI UNA **DEFINIZIONE ASTRATTA**:

Lo spazio vettoriale è un insieme i cui elementi si possono sommare e moltiplicare per numeri.

tutti i vettori del piano cartesiano godono di tali proprietà.

La definizione astratta è soddisfatta da funzioni, polinomi, ecc.

N.B. Se posso dimostrare qualche fatto usando solo le proprietà elencate nella definizione, tale fatto sarà vero per vettori, funzioni, polinomi ecc.

OPERAZIONE è una funzione $X \times X \to X$

(da X per X in X)

$X \times X = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{N}\}$

somma, moltiplicazione → sono operazioni su $\mathbb{N}$

sottrazione, divisione → non sono operazioni su $\mathbb{N}$ perché il risultato può non appartenere a $\mathbb{N}$ oppure non essere definito

↓

(es. divisione di un numero per zero)

DEFINIZIONE DI SPAZIO VETTORIALE

Uno spazio vettoriale V reale è un insieme su cui è definita un'operazione chiamata SOMMA, $V \times V \to V$, e un'operazione chiamata MOLTIPLICAZIONE $\mathbb{R} \times V \to V$.

- se v e $w \in V$ allora è definito un terzo elemento $v+w \in V$
- se λ è un numero reale e $v \in V$, ha senso scrivere λv e $\lambda v \in V$

PROPRIETÁ DEGLI SPAZI VETTORIALI

① $\exists\, 0 \in V \mid \forall v \in V \quad v + \hat{0} = v$

0 è un elemento di V che dipende da V anzi non è lo stesso per ogni spazio vettoriale

② $\forall v \in V \ \exists\, w \in V \mid \quad v + w = \hat{0}$ ➡ SOMMA

③ $\forall u, v, w$ si ha $(u+v)+w = u+(v+w)$

④ $\forall v, w \in V$ si ha $v + w = w + v$

---

⑤ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$ si ha $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

⑥ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$ si ha $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha v + \beta v$ ➡ MOLTIPLICAZIONE

⑦ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v, w \in V$ si ha $(v+w)\cdot\alpha = v\alpha + w\alpha$

⑧ $\forall v\ \hat{0} \in V$ si ha $1 \cdot v = v$ e $0 \cdot v = \hat{0}$

(0 è un vettore nullo, coincide con un punto)

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Motivazione delle proprietà

- da dove viene? da un'astrazione del piano cartesiano
- perché ne vale la pena? ci sono molti oggetti importanti che soddisfano la definizione di spazi vettoriali
- perché è così lunga? perché ogni proprietà è necessaria.

Se scartassimo alcune proprietà o una o più parti della definizione, otterremmo un insieme di oggetti diverso da quello che vogliamo considerare.

esempi

1. INSIEME $\mathbb{N}$: **non** è uno spazio vettoriale perché un numero naturale moltiplicato per un numero reale probabilmente non da come risultato un numero naturale.

2. INSIEME $\mathbb{R}$: è uno spazio vettoriale, valgono le 8 proprietà

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$

somma, moltiplicazione

3. sia $(\mathbb{R}, +, o)$ dove $o : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'operazione definita come

($\mathbb{R}$: coefficienti, $\mathbb{R}$: vettori) $\quad \alpha o x = x^{\alpha}$

ci chiediamo se è uno spazio vettoriale.

- Le proprietà della SOMMA valgono ①, ②, ③, ④

⑤ $\alpha o (\beta o v) = (\alpha o \beta) o v \to \alpha o v^{\beta} = \beta^{\alpha} o v \to (v^{\beta})^{\alpha} = v^{\beta^{\alpha}}$ OK

⑦ $\alpha o (x+y) = \alpha o x + \alpha o y \to (x+y)^{\alpha} \neq x^{\alpha} + y^{\alpha}$ → mom è quasi mai vera

↓

Questo non è uno spazio vettoriale.

⑥ $(\alpha+\beta) o x = \alpha o x + \beta o x \to x^{(\alpha+\beta)} \neq x^{\alpha} + x^{\beta}$

4. sia $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ dove $x \oplus y = x \cdot y$

chi è lo $\hat{0}$ per questa operazione?

① $x \oplus \hat{0} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x \cdot \hat{0} = x$

$\hat{0} = 1$

② $x \oplus y = \hat{0}$

$x \cdot y = 1 \qquad y = \frac{1}{x}$

(parametro, incognita)

mom c'è una soluzione per $x=0$, ciò basta perché mom valga la seconda proprietà e di conseguenza perché $(\mathbb{R}, \oplus, \cdot)$ mom sia uno spazio vettoriale.

Sommario:

- Su qualsiasi insieme, compresi quelli classici come $\mathbb{R}$ o $\mathbb{N}$, si possono definire moltissime operazioni che potrebbero o meno soddisfare le proprietà richieste.

$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale? non possiamo rispondere se non sappiamo quali sono le operazioni.

- Per uno spazio vettoriale bisogna sempre indicare quali sono le operazioni

---

- su un insieme "classico", a seconda di come definiamo l'operazione, lo zero potrebbe non essere il solito zero.

- tutte le 8 proprietà sono necessarie perché ometterne alcune può portarci a considerare oggetti davvero strani, e quindi significherebbe fare del lavoro inutile.

