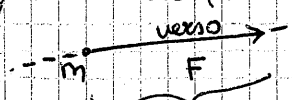
Vettori (spazi vettoriali) e matrici (applicazioni lineari)

Fisica del punto materiale:



m soggetto a 2 forze F_1 e F_2 si muove come fosse soggetto a F, risultante di F_1 e F_2 (regola del parallelogr.)

Proprietà: 4. $ris(F_1, F_2) = ris(F_2, F_1)$ la risultante non dip da come prendiamo F_1 e F_2

3. $ris(F_1, ris(F_2, F_3)) = ris(ris(F_2, F_1), F_3)$

1. $ris(F, 0) = F$
↳ forza con intensità nulla (direz. e verso non definiti)

2. $ris(F, -F) = 0$
↳ direz. e intensità di F e verso opposto. Si può indicare con $\hat{F}$

Noto che il + tra "numeri"
1. $x+0=x \quad \forall x$ elem. neutro zero
2. $\forall x \; \exists (-x)$ t.c. $x+(-x)=0$ ~~elemento~~ esistenza dell'opposto
3. $\forall x,y,z \quad x+(y+z)=(x+y)+z$ proprietà associativa
4. $\forall x,y \quad x+y=y+x$ propr. commutativa

Data l'analogia delle proprietà, decido di scrivere F_1+F_2 invece che $ris(F_1, F_2)$ quindi il simbolo "+" ha un nuovo significato.
Vantaggio = tratteremo con linguaggio unificato oggetti/problemi di natura ≠ tra loro.
↳ lo facciamo grz all'analogia tra risultante tra forze e somma tra numeri

Inoltre: 1) $F+F = 2 \cdot F$ ← nuova idea di simbolo di prodotto
2) $\frac{1}{2}F = G$ t.c. $2G = F$
3) $-7F = G$ t.c. $G+7F=0$

→ $\lambda \cdot F$ = forza con direzione di F, verso di F se $\lambda > 0$ e opposto a F se $\lambda < 0$, intensità pari a $|\lambda| \cdot F$
"input" = coppia di oggetti di tipo numero-forza
"output" = forza
nuova operazione

ATTENZIONE! $x \cdot y$ tra numeri → moltiplico oggetti di stessa natura
$\lambda \cdot F$ → forza
↳ numero } nature diverse!

Proprietà:
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot F) = (\lambda \cdot \mu) F$
6. $(\lambda + \mu)F = \lambda F + \mu F$
7. $\lambda \cdot (F+G) = \lambda \cdot F + \lambda \cdot G$
8. $1 \cdot F = F$, $0 \cdot F = 0$, $\lambda \cdot 0 = 0$ ← numero zero (forza di intensità nulla)

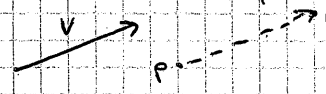
Queste 8 proprietà costituiscono la definizione di "spazio vettoriale"

MASTER COPY
Tel. 050 831 2126
Cell. 388 9837745

Traslazioni nel piano:

Traslazione = funzione del piano nel piano che manda P' in P.

P = piano
V = vettore

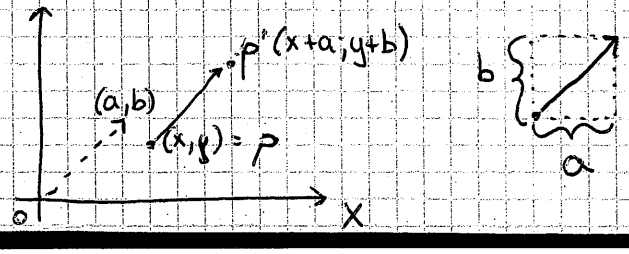


$t_v : P \to P$
$P \to P'$

Legenda: P = punto, P = piano

Traslaz. = determinata da un vettore con componenti (x_0, y_0)

Fisso su P coordinate cartesiane



cioè $\tau_v(x,y) = (x+a; y+b)$

"norma" di un vettore = modulo del vettore $\|\vec{v}\|$

vettore (x_0, y_0) Punto traslato. $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$

Decido di scrivere $(x+a, y+b) = (x,y) + (a,b)$ cioè uso la somma anche tra punti del piano (fissate le coordinate) $P'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow P' = P+\vec{v}$

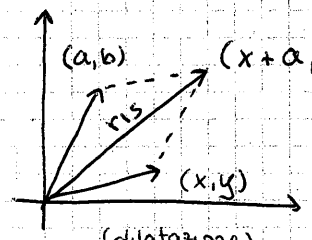
Proprietà: 1) $P+0=P \ \forall P$ $\quad 0$ = origine

2) $\forall P \ \exists -P$ t.c. $P+(-P)=0$ $\quad P(x,y) \quad -P(-x,-y)$

3) $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

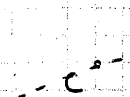
4) $P+Q=Q+P$

Stesse di prima!!



→ Mettendo in colonna (con 2 incognite) sia i punti del piano e che i vettori abbiamo abbandonato la distinzione tra questi tipi di oggetti. Ciò si spiega con la costruzione appena vista = un punto "P" determina un vettore che ha "coda" nell'origine degli assi e "testa" in P. Viceversa un vettore v determina un punto se si trasla la "coda" di v nell'origine e se ne considera la "testa".

Omotetia di ragione λ e centro C · trasforma $P \to P$ con $\lambda \neq 0$

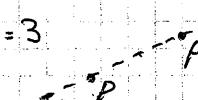


P' sulla stessa pC t.c. $\overline{P'C} = |\lambda| \cdot \overline{PC}$, dalla stessa parte se $\lambda \geq 0$ e dall'altra se $\lambda < 0$

(se $P=C$, viene C) → no dilatazione!

$P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow P'\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

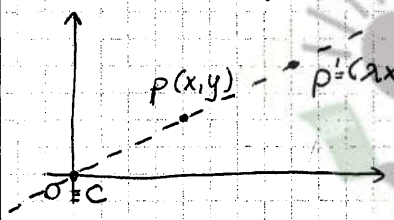
es. $\lambda = 3$



es 2. $\lambda = -\frac{1}{2}$



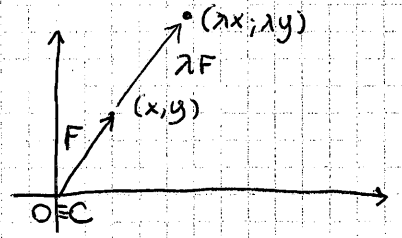
fissiamo un riferimento cartesiano con origine in C ($C \equiv O$):



Decidiamo che $(\lambda x; \lambda y)$ lo scrivo $\lambda \cdot (x,y)$. ← nuovo significato

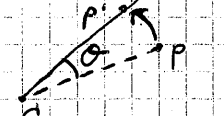
Stesse proprietà:

5. $(\lambda \mu) \cdot P = \lambda (\mu \cdot P)$
6. $(\lambda + \mu) P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$
7. $\lambda (P+Q) = \lambda P + \lambda Q$
8. $1 \cdot P = P$; $0 \cdot P = 0$, $\lambda \cdot 0 = 0$



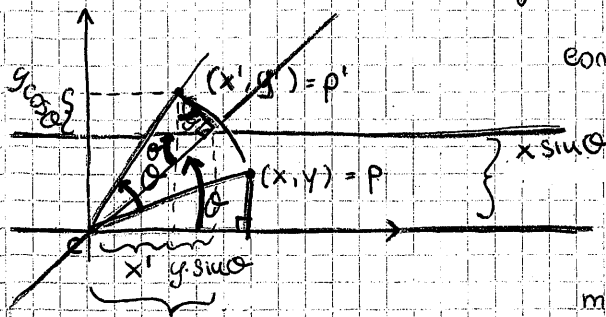
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Rotazione = di centro C e angolo θ



$R_{\theta,C} : P \to P$ $\quad P \to P'$ (rotazione antioraria)

fissando coordinate con origine in C.



come trovo x', y'?

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \Rightarrow$$

voglio scriverlo come $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nuovo!

matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

{Decido di scrivere le coordinate in colonna e non in riga}

come si svolge: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot x + b\cdot y \\ c\cdot x + d\cdot y \end{pmatrix}$ Regola di moltiplicazione

fatto in modo che: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix}$

Chiamiamo $r_\theta = P \to P$ la rotazione di θ intorno all'origine del piano coef. θ, φ angoli: $P \xrightarrow{r_\theta} P \xrightarrow{r_\varphi} P$ $\quad (r_\varphi \cdot r_\theta)(p) = r_\varphi(r_\theta(p))$

$r_\varphi \circ r_\theta$ ↑ composto

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Chiamo $r_\varphi \circ r_\theta = r_{\varphi+\theta}$

$(r_\varphi \circ r_\theta)(p) = r_\varphi(r_\theta(\varphi)) = R_\varphi \odot (R_\theta \odot p)$ $\quad \odot$ = regola di • ultima inventata tra matrice e vettore

$(r_{\varphi+\theta})(p) = R_{\varphi+\theta} \odot p \overset{?}{=} (R_\varphi \cdot R_\theta) \odot p$ $\quad \cdot$ = da inventare

Lo invento così: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$

Usiamole per:

$R_\varphi \cdot R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta & -\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow$ è $R_{\varphi+\theta}$!! Infatti lo svolgimento di $R_\varphi \cdot R_\theta$ dà lo stesso risultato di $R_{\varphi+\theta}$!

Dunque: • l'operaz. geom. di composizione di funz. si traduce nell'operaz. algebr. di prodotto di matrici.

• l'operaz. algebr. contiene le formule trigonometriche di sin e cos.

OSS. sulla composizione:

funzione $f : X \xrightarrow[\text{dominio}]{\text{legge}} Y$ codominio

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$g \circ f$

$g \circ f \overset{?}{=} f \circ g$ **NO!**

$Y \xrightarrow{g} Z$ $\quad X \xrightarrow{f} Y$

Nella composizione delle due rotazioni di angoli φ e θ non abbiamo considerato quale avvenisse per prima poiché ci sarebbe stato sempre lo stesso risultato. Ciò non è affatto vero per funzioni qualsiasi!!

es. $f(t) = t^2$ $g(t) = 2t$ $(f \circ g)(t) = 4t^2 \neq (g \circ f)(t) = 2t^2$

1) $f \circ g$ ha senso solo se $Z = X$ $\quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ ($g \circ f$) $\quad Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ ($f \circ g$)

2) l'uguaglianza $f \circ g = g \circ f$ vale solo se $Y = X$

$X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X$ ($g \circ f$) $\quad X \to X \to X$ ($f \circ g$)

3) anche se $Z = Y = X$ non è sempre vero che sono uguali.

Es. 1: $X = P$ piano $\quad f = r_\theta \quad g = r_\varphi \quad r_\theta \circ r_\varphi = r_\varphi \circ r_\theta$

Es. 2: X = numeri di qualche tipo $\quad f(x) = 2x \quad g(x) = x^2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 4x^2$

numero 1 $\quad (f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(1) = 4$ $\rightarrow$ sono diversi !!

Successione di Fibonacci: $(f_n)_{n=0}^{+\infty}$ (libro)

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$$

viene: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...

Dom. Quant'è $f_{1000.000}$? FATTO: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62\ldots$ $\quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}62\ldots$ Trascurabile x $n \gg 0$

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ operazioni di: addizione (operazione binaria e interna) $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(n, m) \mapsto n + m$

Proprietà:
1. $n + 0 = n \quad \forall n$
3. $n + (m + k) = (n + m) + k \quad \forall n, m, k$
4. $n + m = m + n$
2. esistenza dell'opposto: dato n cercare $x \in \mathbb{N}$ t.c. $n + x = 0$ ha soluzione solo per $n = 0$ ed è $x = 0$. Per superare inconvenienti:

Numeri interi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

operaz. $\pm : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ Propr. = 1+3+4 come prima e 2. $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists (-n)$ t.c. $n + (-n) = 0$!

operaz. prodotto (altra operazione binaria interna): $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $(n, m) \mapsto n \cdot m$

proprietà:
5. $1 \cdot n = n \quad \forall n$
7. $n(m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k$
8. $n \cdot m = m \cdot n$
9. $n(m + k) = n \cdot m + n \cdot k$

6. Esistenza dell'inverso per $n \neq 0$ ($0 \cdot k = 0 \ \forall k$) = cerco x t.c. $n \cdot x = 1$
Soluzione per $n = \pm 1$ ed è $x = n$ $\rightarrow$ unica soluzione per $x \in \mathbb{Z}$

Numeri razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$

ATTENZIONE!! non è proprio vero vero! Come frazioni $-\frac{9}{15} \neq \frac{6}{-10}$

Dunque bisogna convenire che $\frac{n}{m} = \frac{k}{h}$ se $n \cdot h = m \cdot k$

Inoltre conveniamo che $\frac{n}{1} = n$, dunque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745

Ora valgono le proprietà 1→5 e 7→9 e la 6. $\forall q \neq 0 \ \exists q^{-1}$ t.c. $q \cdot q^{-1} = 1$

Un insieme F con 2 operazioni $+ : F \times F \to F$, $\cdot : F \times F \to F$ si chiama "campo" se valgono le 9 proprietà iniziate:

1. $\exists 0$ t.c. $0 + x = x \ \forall x$
2. $\forall x \ \exists (-x)$ t.c. $x + (-x) = 0$
3. $x + (y+z) = (x+y) + z \ \forall x, y, z$
4. $x + y = y + x$
5. $\exists 1$ t.c. $1 \cdot x = x \ \forall x$
6. $\forall x \neq 0 \ \exists x^{-1}$ t.c. $x \cdot x^{-1} = 1$ *
7. $x(y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
8. $x \cdot y = y \cdot x$
9. $x(y+z) = xy + xz$

$F + 0$ è un "gruppo commutativo"

$F \setminus \{0\}$ (tolto el. neutro), $\cdot$, 1 è un gruppo commutativo

→ propr. distributiva

* Perché dalle altre proprietà è possibile dedurre che $0 \cdot y = 0 \ \forall y$

Oss. $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$ questi passaggi hanno motivazioni algebriche: trovare soluzioni di equazioni

Anche in $\mathbb{Q}$ ci sono equaz. prive di soluzioni es. $x^2 = 2$ → ma anche di natura geometrico-analitica

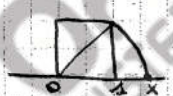
Passiamo ai numeri reali ma non solo per motivazioni algebriche. Si nota che si può far corrispondere $\mathbb{Q}$ a un sottoinsieme di punti di una retta su cui sono fissati 2 punti 0 e 1 tra loro distinti.



Ci sono punti che non corrispondono ad alcun numero razionale

Chiamo $\mathbb{R}$ tutti i punti della retta. Dunque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Fatto: le operazioni $+$ e $\times$ di $\mathbb{Q}$ si estendono a $\mathbb{R}$ con le proprietà da 1 a 9 precedenti. Dunque $\mathbb{R}$ è un "campo".

Esempi di numeri in $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$: $\sqrt{2}$, π, e ... ecc.



x = non razionale, infatti $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$!!!

Oss. Definizione: Chiamo 'algebrico' un numero reale che è radice di un polinomio a coefficienti interi (o razionali). Ad es. $\sqrt[5]{17}$ radice di $t^5 - 17$

Fatto: se prendo un punto a caso su $\mathbb{R}$, c'è probabilità nulla che esso sia algebrico. Ad esempio π e e non sono algebrici.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

POLINOMI

$\mathbb{R}[t]$ = è l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata t. → simbolo che non è a $\mathbb{R}$.

es. $\sqrt{3} - 2t + 5t^2 - 17/3\, t^3 + \pi t^4$

$\mathbb{R}[t] = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n : n \in \mathbb{N}, a_0, a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}\}$ ("al variare di")

$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$

$t \notin \mathbb{R}$ (detto "indeterminata")

ATTENZIONE! può: • $\sqrt{7} - t + \frac{13}{2} t^3$ lo identifico a $\sqrt{7} - t + 0 \cdot t^2 + \frac{13}{2} t^3$

• $-7 + t + \sqrt{e}\, t^2 \neq -7 + t + \sqrt{e}\, t^3 + 0 \cdot t^3$ invece le identifichiamo

⇒ morale: convenzione che si possono aggiungere o togliere monomi con coefic. nullo (del tipo $0 \cdot x^h$).

Definizione: Il grado di un polinomio: $\deg(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)$ = massimo dei k t.c. $a_k \neq 0$. $\deg(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n) = \max\{k : a_k \neq 0\}$ ($\neq 0$)

Convenzione: $\deg(0) = -\infty$