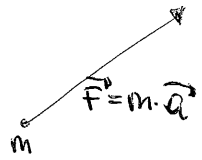
MOTIVAZIONI

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 333 9837745

Manipolazione di tipo algebrico di oggetti geometrici

⇓

Esempio: forze applicate ad un punto materiale



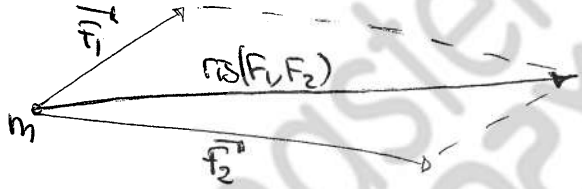
$\vec{F}$ → **vettore**, caratterizzato da: • direzione • verso • intensità

↓

la sua lunghezza è ∝ all'intensità di $\vec{F}$.

Risultante di due forze

"Somma" di due forze applicate allo stesso punto P: **regola del parallelogramma**



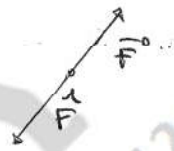
Punto materiale: massa ma non estensione

Proprietà: 1. Se 0 è F = intensità nulla

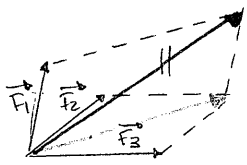
⇓

$ris(0,\vec{F}) = \vec{F}\ \forall F$ → 0: **elemento neutro**

2. $\forall \vec{F}\ \exists\ \hat{F} : \hat{F} = -\vec{F}$, cioè **l'elemento opposto** (= intensità (= direzione) ≠ verso)



$: ris(\vec{F},\hat{F}) = 0$



3. $ris(F_1, ris(F_2,F_3)) = ris(ris(F_1,F_2),F_3)$ **proprietà associativa**

4. $ris(F_1,F_2) = ris(F_2,F_1)$ **proprietà commutativa**

Nota: ci si accorge che queste 4 proprietà sono analoghe a quelle dell'operazione **somma**.

1. $0+x = x+0 = x\ \ \forall x$ (0 elemento neutro)
2. $\forall x\ \exists(-x) : x+(-x) = (-x)+x = 0$ (esistenza dell'opposto)
3. $x+(y+z) = (x+y)+z$ (associative)
4. $x+y = y+x$ (commutative)

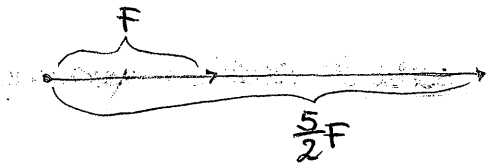
⇓

Per questo decido di scrivere F_1+F_2 → nuova operazione di somma invece di $ris(F_1,F_2)$ ∎

Altre operazioni con le forze:

- raddoppiare, dimezzare o triplicare l'intensità di $\vec{F}$, senza modificare direzione e verso

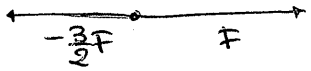
$2F = F + F$; $\frac{1}{2}F \Rightarrow F$: $2\left(\frac{1}{2}F\right) = F$, cioè la forza con stessa direzione e verso di $\vec{F}$, ma metà intensità



MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Posso cambiarne il verso: $-F$ = l'opposto di F

$-\frac{7}{4}F = \frac{7}{4}$ dell'opposto di F



Definisco una nuova operazione $\circ$: $\lambda \cdot \vec{F}$ con λ numero ed $\vec{F}$ forza

$\lambda \cdot \vec{F}' \rightarrow \vec{F}$ = la forza con direzione come $\vec{F}$, verso come $\vec{F}$ se $\lambda > 0$, opposto se $\lambda < 0$, intensità $|\lambda| \cdot |\vec{F}|$

$\circ$: nuovo
$\cdot$: vecchio

Proprietà:

5) $\lambda \circ (\mu \circ \vec{F}) = (\lambda \cdot \mu) \circ \vec{F}$ associativa

6) $\lambda \circ (\vec{F_1} + \vec{F_2}) = \lambda \circ F_1 + \lambda \circ F_2$ $(= (\lambda F_1) + (\lambda F_2))$

7) $(\lambda_1 + \lambda_2) \circ \vec{F} = \lambda_1 \circ \vec{F} + \lambda_2 \circ \vec{F}$

} distributive

8) $\hat{0} \circ \vec{F} = \lambda \circ 0 = 0$

$1 \circ \vec{F} = \vec{F}$

Proprietà analoghe alle proprietà tra numeri

Abbiamo definito:
- insieme delle forze applicate ad un punto
- operazione "più"
- operazione di prodotto con numeri
- proprietà

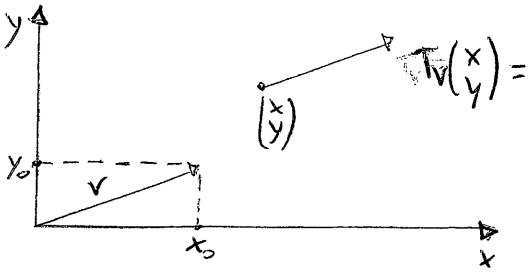
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esempio: trasformazione piana

- **Traslazioni**

Trasformazioni del piano cartesiano ⟹ T_v: piano → piano

T è determinato da un vettore v avente certe componenti (x_0, y_0) ed agisce su un generico punto P.



$$\begin{cases}x' = x + x_0\\ y' = y + y_0\end{cases}$$

$$P' = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{P' = P + v}$$

Nuova operazione "+":

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

operazione tra coppie di numeri

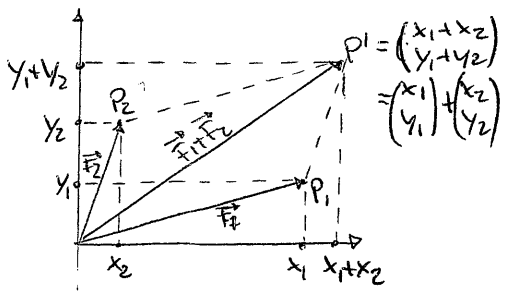
Proprietà: valgono le proprietà algebriche analoghe a quelle dell'addizione fra numeri

1. se $0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow 0 + P = P \;\forall P$ con $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ elemento neutro
2. se $P = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ e $-P = \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix} \Rightarrow P + (-P) = 0$

elemento opposto

3. $P + (Q + R) = (P + Q) + R$ proprietà associativa
4. $P + Q = Q + P$ proprietà commutativa

Ho introdotto la somma fra punti del piano cartesiano, ma è la stessa di prima fra forze.

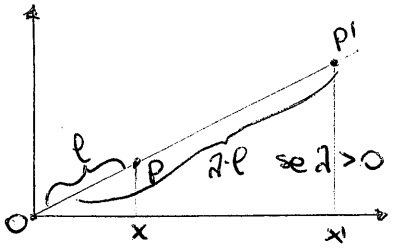


Un punto P determina il vettore che ha "coda" nell'origine degli assi e "testa" in P. Viceversa, un vettore v determina un punto se si trasporta la "coda" di v nell'origine e se ne considera la "testa".

[Risultante tra forze espressa in coordinate]

- **Omotetie**

Di ragione $\lambda \neq 0$ centrata nell'origine O

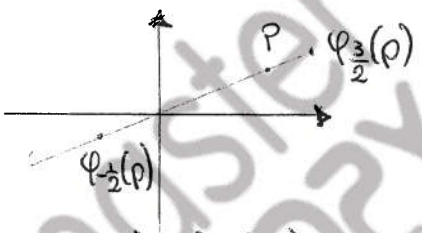


$\varphi_\lambda : \text{piano} \to \text{piano}$

$\varphi_\lambda(P)$ = il punto che sta sulla retta che contiene l'origine e P, con distanza da O $|\lambda|$ - quella di P. Dalla stessa parte se $\lambda \geq 0$, dalla parte opposta rispetto all'origine se $\lambda < 0$.

$$\varphi_\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \lambda \cdot x \\ y' = \lambda \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P \text{ e } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P'$$



Valgono le proprietà 5), 6), 7), 8) di prima:

5. $\lambda(\mu \cdot P) = (\lambda \cdot \mu)P$ — propr. associativa
6. $\lambda(P_1 + P_2) = \lambda P_1 + \lambda P_2$ — propr. distributiva
7. $(\lambda_1 + \lambda_2)P = \lambda_1 P + \lambda_2 P$
8. $1 \cdot P = P$ — 1: elemento neutro

$0 \cdot P = O$

Notazione: $+ : \text{piano} \times \text{piano} \longrightarrow \text{piano}$

$(P, Q) \longmapsto P + Q$

$\cdot : \text{numeri} \times \text{piano} \longrightarrow \text{piano}$

$(\lambda, P) \longmapsto \lambda \cdot P$

Osservazione: i due esempi in realtà sono lo stesso

l'omotetia corrisponde esattamente alla moltiplicazione tra un numero ed una forza

- $F \rightsquigarrow$ punto del piano P: metto l'origine nel primo estremo di F e chiamo P il 2° estremo
- punto P del piano $\rightsquigarrow F$: la forza con 1° estremo in O e 2° in P.

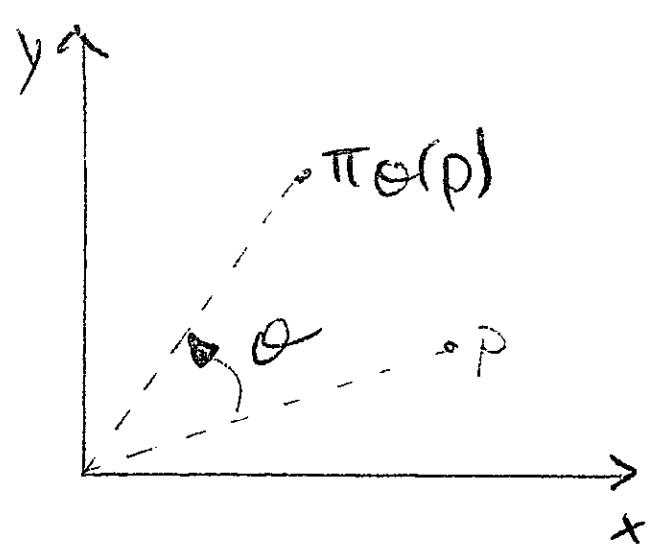
Questa corrispondenza rispetta le operazioni definite

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Rotazioni

↓

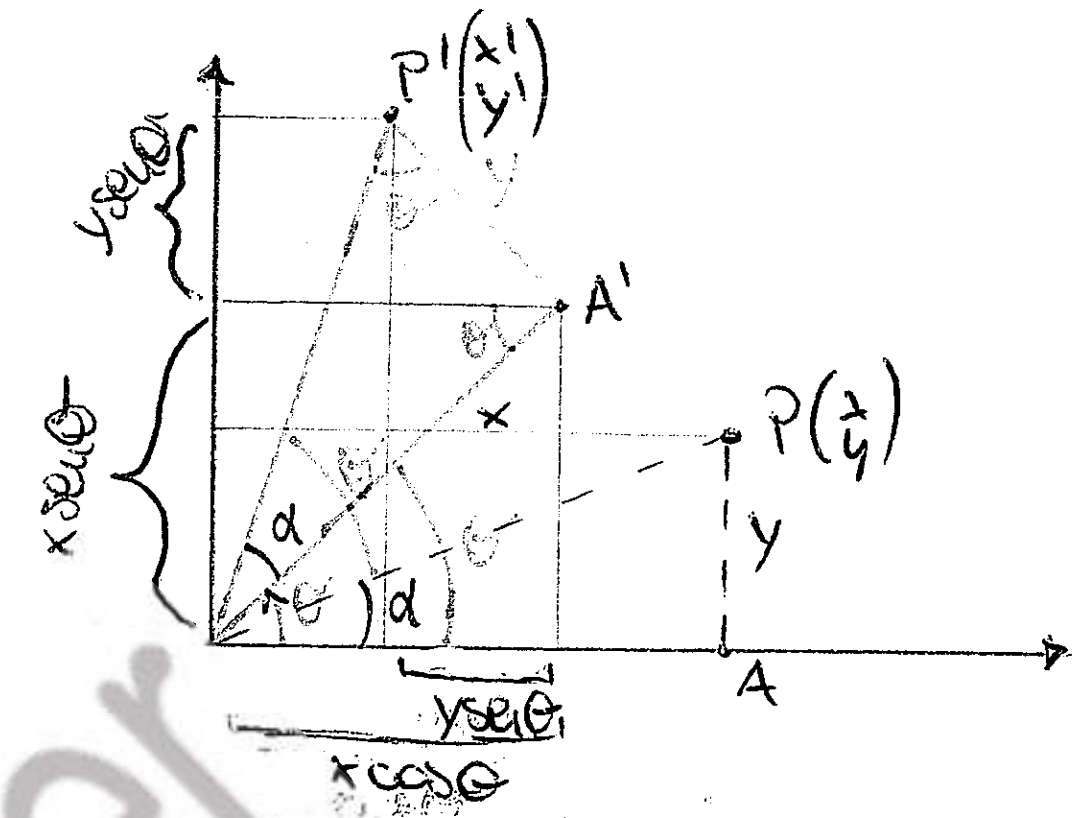
Intorno ad O di angolo θ : r_θ : piano → piano



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\theta \\ y' = x\,\text{sen}\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

↑ Matrice 2×2



Regola della moltiplicazione:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Scriverò: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ non un numero

↓

Ho definito (matr.) × (vett) in modo che $r_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Osservazione

Consideriamo due angoli θ e φ, ho due modi per moltiplicarli:

- $(r_\varphi + r_\theta)(p) = r_\varphi(r_\theta(p)) = r_{\varphi+\theta}(p)$ → rotazione di angolo $\varphi+\theta$.
  geometricamente è chiaro.
  Algebricamente: $R_\varphi \cdot (R_\theta \cdot p) = R_{\varphi+\theta} \cdot p$
  $\qquad\qquad \| $
  $(R_\varphi \cdot R_\theta) \cdot p$ ← prodotto fra matrici

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- Regola di moltiplicazione tra tabelle con due righe e due colonne

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

Otteniamo perciò:

$$R_\theta \cdot R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\text{sen}\varphi \\ \text{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) & -\sin(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) & \cos(\varphi+\theta) \end{pmatrix}$$