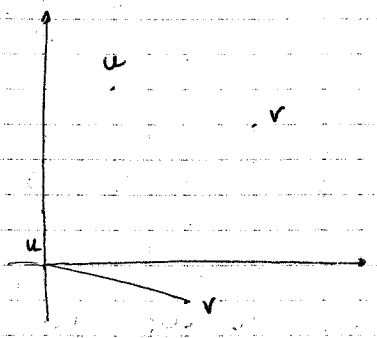
3/3/10

NOZIONI GEOMETRICHE

- Distanza in $\mathbb{R}^2$



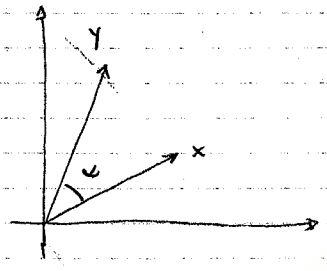
$d(u,v)$ = lunghezza di $u-v = x =$

$= \sqrt{x_1^2 - x_2^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2}$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

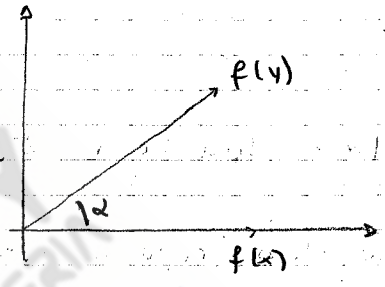
- Perpendicolarità e angolo tra due vettori



$x \perp y$?

$\alpha = \ldots$? → rotazione

$x, y \neq 0$



Per calcolare α ruoto in modo che x vada a piacere sul semiasse Ox_1 positivo.

Rotazioni: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ uso: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$

È una rotazione che trasforma x in $\begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ -x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{pmatrix}$$

Dunque $x \perp y$ se la prima coordinata è nulla (perché $f(y)$ deve stare su y), cioè se $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$.

Inoltre: $\alpha = \arccos \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (-x_2 y_1 + x_1 y_2)^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)}}$$

Angolo tra due vettori diversi da 0.

Oppure anche $\alpha = \arccos \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1 \cdot x_1}}$

Def. $\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$ Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^2$ dei vettori x e y.

- $d(0,x) = \sqrt{\langle x|x\rangle_{\mathbb{R}^2}}$
- $x \perp y$ se $\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0$
- $\measuredangle(x,y) = \arccos \dfrac{\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{\langle x|x\rangle_{\mathbb{R}^2}} \cdot \sqrt{\langle y|y\rangle_{\mathbb{R}^2}}} = \dfrac{\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|x\|_{\mathbb{R}^2} \cdot \|y\|_{\mathbb{R}^2}}$ Angolo tra due vettori con la def. di prodotto scalare.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$: funzione da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

dove l'argomento è dato da due vettori e dove i valori sono numeri.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Definisco ora $\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n}$ in $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = {}^t y \cdot x = \text{Prodotto scalare in } \mathbb{R}^n \text{ di } n \text{ vettori.}$$

$$= (y_1 + \dots + y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Oss: $\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t x \cdot y$

$\langle * | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$: funzione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

dove l'argomento è dato da 2 vettori

Norma

$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\langle x|x\rangle_{\mathbb{R}^n}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ Prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$.

Norma di x = lunghezza del vettore x

$\Rightarrow d(u,v) = \|u - v\|_{\mathbb{R}^n}$

- $\vartheta(x,y) = \arccos \dfrac{\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \cdot \|y\|_{\mathbb{R}^n}}$ $(x, y \neq 0)$ Angolo tra due vettori con il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$

Proprietà di $\langle * | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$:

- È un'applicazione bilineare: ho due vettori e ne fisso uno e faccio la combinazione lineare dell'altro.

$\langle \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 | y \rangle = \lambda_1 \cdot \langle x_1 | y \rangle + \lambda_2 \cdot \langle x_2 | y \rangle$ Linearità a sinistra

$\langle x | \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \rangle = \lambda_1 \cdot \langle x_1 | y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 | y \rangle$ Linearità a destra

Infatti $\langle \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 | y \rangle = {}^t y (\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) =$

$= \lambda_1 \cdot {}^t y \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot {}^t y \cdot x_2 = \lambda_1 \cdot \langle x_1 | y \rangle + \lambda_2 \cdot \langle x_2 | y \rangle$.

Inoltre $\langle x | \lambda_1 y_1 + \lambda_2 \cdot y_2 \rangle = {}^t (\lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2) \cdot x =$

$= \lambda_1 \cdot {}^t y_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot {}^t y_2 \cdot x = \lambda_1 \langle x | y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x | y_2 \rangle$

- Simmetria: $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$

Infatti: $\langle y|x\rangle = {}^t x \cdot y$, che è un numero, cioè $M_{1\times 1}(\mathbb{R})$

${}^t x \cdot y = {}^t ({}^t x \cdot y)$, perché è un numero.

${}^t ({}^t x \cdot y) = {}^t y \cdot \underbrace{{}^t ({}^t x)}_{= x} = {}^t y \cdot x = \langle x|y\rangle$ ✓

Oss: $\underbrace{{}^t(A\cdot B)}_{\substack{\underbrace{m\times k\cdot k\times m}_{m\times m}\\ m\times m}} = \underbrace{{}^tB\cdot {}^tA}_{\substack{\underbrace{m\times k\cdot k\times m}_{m\times m}\\ m\times m}}$

$$\left({}^t(A\cdot B)\right)_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = \sum_{e=1}^{k} (A)_{je}\cdot(B)_{ei}$$

$$({}^tB\cdot {}^tA)_{ij} = \sum_{e=1}^{k} ({}^tB)_{ie}\cdot({}^tA)_{ej} = \sum_{e=1}^{k} (B)_{ei}\cdot(A)_{je}$$

Vedo che sono uguali.

- definito positivo: $\langle x|x\rangle > 0$ se $x\neq 0$

Oss: per la bilinearità ho che $\langle 0|y\rangle = \langle y|0\rangle = 0$ $\forall y$.

Inoltre $\langle 0|0\rangle = 0$. Infatti $\langle x|y\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Def: Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dico che $f: V\times V\to\mathbb{R}$ è

- bilineare, se $f(\lambda_1\cdot v_1 + \lambda_2\cdot v_2 | w) = \lambda_1\cdot f(v_1|w) + \lambda_2\cdot f(v_2|w)$

  $f(w|\lambda_2\cdot v_1 + \lambda_2\cdot v_2) = \lambda_1\cdot f(w_1,v_1) + \lambda_2\cdot f(w_1,v_2)$

- simmetrica, se $f(w,v) = f(v,w)$ $\forall v,w\in V$

- positiva, se $f(v,v)>0$ $\forall v\neq 0$

- prodotto scalare se bilineare, simmetrica e positiva.

  (di solito pongo $\langle v|w\rangle = f(v,w)$).

Es. 1: $\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t y\cdot x$ standard su $\mathbb{R}^n$

Es. 2: V spazio vettoriale di $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ pongo

$$\langle a|b\rangle = \underbrace{\underbrace{\mathrm{tr}\,({}^tB\cdot A)}_{n\times n}}_{\mathbb{R}}$$

traccia = somma degli elementi sulla diagonale principale.

· bilinearità (a destra)

$$\langle a \mid \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \rangle \underset{\text{def}}{=} tr\left({}^t(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)\cdot A\right) =$$

$$= \underset{\substack{\text{linearità}\\ \text{trasposizione}}}{=} tr\left((\lambda_1 {}^tB_1 + \lambda_2 {}^tB_2)\cdot A\right) =$$

$$= \underset{\substack{\text{linearità}\\ \text{rispetto a colonne}}}{=} tr\left(\lambda_1 {}^tB_1 \cdot A + \lambda_2 {}^tB_2 A\right) =$$

$$= \underset{\substack{\text{linearità}\\ \text{della traccia}}}{\lambda_1 \cdot tr({}^tB_1 \cdot A) + \lambda_2 tr({}^tB_2 \cdot A)} \underset{\text{def}}{=} \lambda_1 \langle A \mid B_1\rangle + \lambda_2 \langle A \mid B_2\rangle .$$

· simmetria

$$\langle B \mid A\rangle = tr({}^tA \cdot B) = tr\left({}^t({}^tA \cdot B)\right) = tr\left({}^tB \cdot {}^t({}^tA)\right) =$$

$$= tr({}^tB \cdot A) = \langle A \mid B\rangle$$

· definizione positiva.

$$\langle A \mid A\rangle = tr({}^tA \cdot A) = \sum_{i=1}^{m} ({}^tA \cdot A)_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} ({}^tA)_{ij} \cdot (A)_{ji} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}^2 = \begin{pmatrix}\text{somma dei quadrati}\\ \text{di tutti i coefficienti di } A\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \langle A \mid A\rangle > 0$ per $A \neq 0$

Inoltre se identifico $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{m\times n}$, il prodotto scalare

$$(v_1 \dots v_n) \to \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$\langle A \mid B\rangle = tr({}^tB \cdot A)$ corrisponde al prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Es. 3. $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$ Spazio delle funzioni continue.

È uno spazio vettoriale, perché se f e g sono continue, $f+g$ è continua, così come $\lambda \cdot f$.

$$\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)$$

· bilinearità: $\langle f_1 + f_2 \mid g\rangle = \int_0^1 (f_1(t) + f_2(t))\cdot g(t)\, dt =$

$$= \int_0^1 f_1(t)\cdot g(t) + f_2(t)\cdot g(t)\, dt = \int_0^1 f_1(t)\cdot g(t)\, dt + \int_0^1 f_2(t)\cdot g(t)\, dt =$$

$$= \langle f_1 \mid g\rangle + \langle f_2 \mid g\rangle .$$