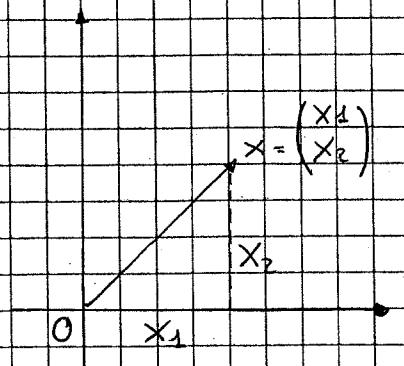
09/03/11

Geometria

Riferimenti al "Appunti di Algebra Lineare" di Carla Peroma

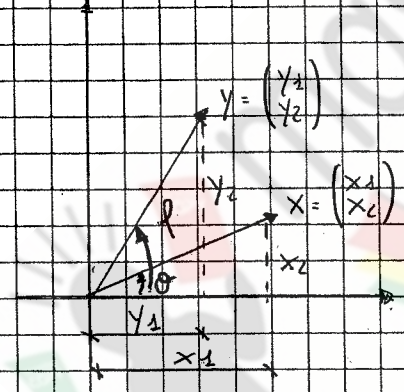
Distanza in $\mathbb{R}^2$:



distanza $(0; x) \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Angolo fra due vettori in $\mathbb{R}^2$:



$x \hat{0} y = ?$

$$x = \rho \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{x_1}{\rho} \qquad \sin\vartheta = \frac{x_2}{\rho}$$

$$y = m \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} \qquad m = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{y_1}{m} \qquad \sin\varphi = \frac{y_2}{m}$$

$$\cos(\vartheta - \varphi) = \cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

Oss: $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 \cdot x_2}$

$\Rightarrow$ se poniamo $f(x; y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

abbiamo: $d(0;x) = \sqrt{\langle x;x\rangle}$

$$\cos(x\hat{0}y) = \frac{\langle x\cdot y\rangle}{\sqrt{\langle x;x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}}$$

Def: chiamo $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2} = x_1y_1 + x_2y_2 \text{ ovvero } \langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2} = {}^t x \cdot y$$

Prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^2$.

inoltre chiamo $\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{\langle x|x\rangle_{\mathbb{R}^2}}$ norma associata a $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow d(0,x) = \|x\|$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

$$\cos(x\hat{0}y) = \frac{\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|x\|_{\mathbb{R}^2}\cdot\|y\|_{\mathbb{R}^2}}$$

In $\mathbb{R}^m$: $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^m$

$$\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^m} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m = (x_1 \dots x_m)\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = {}^t x \cdot y$$

Stesse formule per $d(0;x)$ e $\cos(x\hat{0}y)$

Proprietà di $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^m}$:

- bilineare; cioè lineare in ciascun argomento fissato l'altro

$$\langle \lambda x + \mu z | y\rangle_{\mathbb{R}^m} = \lambda\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^m} + \mu\langle z|y\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

(lin. a sinistra)

$$\langle x | \lambda y + \mu z\rangle_{\mathbb{R}^m} = \lambda\langle x|y\rangle_{\mathbb{R}^m} + \mu\langle x|z\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

(lin. a destra)

Infatti: $\langle \lambda x + \mu z|y\rangle = {}^t(\lambda x + \mu z)\cdot y = (\lambda\cdot{}^t x + \mu\cdot{}^t z)\cdot y =$

$= \lambda\langle x|y\rangle + \mu\langle z|y\rangle$

- simmetria: $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$, infatti: ${}^t x \cdot y = {}^t({}^t x \cdot y) = {}^t y \, {}^t({}^t x) = {}^t y \cdot x$
- definita positiva: $\langle x \mid x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

In generale: ${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A$

Trasposizione del prodotto

$${}^t(\underbrace{A}_{m\times m} \cdot \underbrace{B}_{m\times k}) \neq \underbrace{{}^t B}_{k\times m} \cdot \underbrace{{}^t A}_{m\times m}$$

$m \times k$

$k \times m$

$$({}^t(A\cdot B))_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = \sum_{p=1}^{m} a_{jp}\, b_{pi} \quad ({}^t B \cdot {}^t A)_{ij} = \sum_{p=1}^{m} ({}^t B)_{ip} \cdot ({}^t A)_{pj} = \sum_{p=1}^{m} b_{pi} \cdot a_{jp}$$

Riassunto

$$\langle x \mid y \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t x \cdot y$$

$$= \langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

- bilineare
- simmetrica
- definita positiva

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Def: se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dico che una funzione $f : V \times V \to \mathbb{R}$ è:

- bilineare se $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 f(v_1, w) + \lambda_2 f(v_2, w)$
  $f(v_1, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 f(v_1, w_1) + \lambda_2 f(v_1, w_2)$
- simmetrica se $f(w, v) = f(v, w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}$
- definita positiva se $f(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0$ (Oss: $f(v, 0) = f(0, v) = 0 \quad \forall v \in V$ se f è bilineare)

· è un prodotto scalare se valgono le tre precedenti

Es: $V = \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ $\quad \langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tA\,B)$

$({}^tA)_{m\times m}\,B_{m\times m}$ è un prodotto scalare

$m\times m$

① bilineare: $\langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 | B\rangle_{def} = \mathrm{tr}\,({}^t(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)\cdot B)$

$= \mathrm{tr}\,((\lambda_1 {}^tA_1 + \lambda_2 {}^tA_2)\cdot B) = \mathrm{tr}\,(\lambda_1 {}^tA_1 \cdot B + \lambda_2 {}^tA_2 \cdot B)$

↓ linearità trasposizione ; ↓ bilinearità prodotto righe per colonne

$= \lambda_1 \mathrm{tr}\,({}^tA_1 B) + \lambda_2 \mathrm{tr}\,({}^tA_2 B) = \lambda_1 \langle A_1|B\rangle + \lambda_2 \langle A_2|B\rangle$

↓ linearità traccia

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

② simmetrica:

$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tA\cdot B) = \mathrm{tr}\,({}^t({}^tA\cdot B)) = \mathrm{tr}\,({}^tB\cdot A) = \langle B|A\rangle$

③ definita positiva: $\langle A|A\rangle = \mathrm{tr}\,({}^tA\cdot A) = \sum_{i=1}^{m} ({}^tA\cdot A)_{ii} =$

$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} ({}^tA)_{ij}\,(A)_{ji}$

$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}^2 \geq 0$ = somma dei quadrati di tutti i coefficienti

In realtà: $\langle A|B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\,b_{ji}$

= somma dei prodotti dei coefficienti di A e B pos per pos

⇒ simmetria; inoltre è il prodotto scalare canonico di $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m\cdot n}$

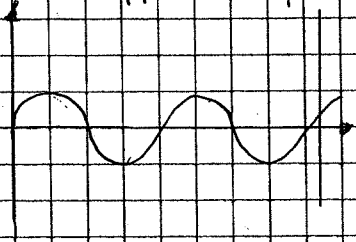
Esercizio ①: $A_{m\times m}$ $B_{m\times m}$ $\Rightarrow \mathrm{tr}\,(A\cdot B) = \mathrm{tr}\,(B\cdot A)$

· Ne segue che $\mathrm{tr}\,(A\cdot B\cdot C) = \mathrm{tr}\,(B\cdot A\cdot C)$ quando ha senso

Esempio: $V = C^0([0;1], \mathbb{R})$ $\quad \langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t)\, dt$$

Se V rappresenta funzioni d'onda:



$\langle f | f \rangle$ = esempio

Verifica:

- bilinearità: $\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 | g \rangle = \int_0^1 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) \cdot g(t)\, dt =$

$$= \int_0^1 (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))\, g(t)\, dt$$

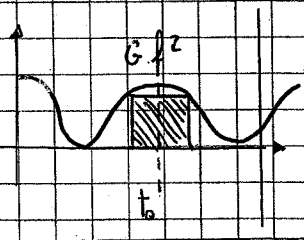
$$= \lambda_1 \int_0^1 f_1(t) g(t)\, dt + \lambda_2 \int_0^1 f_1(t) g(t)\, dt$$

$$= \lambda_1 \langle f_1 | g \rangle + \lambda_2 \langle f_2 | g \rangle$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

- simmetria: $\checkmark$
- def. pos.: $\langle f | f \rangle = \int_0^1 f(t)^2\, dt$



$\exists\, \varepsilon, \delta > 0$ t.c.

$f(t)^2 \geq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ (permanenza del segno perché f^2 è continua)

Programma: descrivere tutti i prodotti scalari su $V = \mathbb{R}^n$

Def: data $A \in M_{m \times m}$ pongo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\langle x | y \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot y$$

$1 \times m \quad m \times m \quad m \times 1$

1×1