## QUESITI [1]

1) Stabilire per quali $k$ $\begin{pmatrix} k^2 & k+1 \\ 0 & k+2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

è diagonale quindi gli autovalori sono: $k^2$ $k+2$

$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow (k+1)(k-2) = 0$

$k \neq -1, 2$ è diagonalizzabile

- $k = 2$ non lo è $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- $k = -1$ lo è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{k \neq -2}$

2) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ $\perp$ a $\text{span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\right)$ e aventi seconda e terza componente $1$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1-\alpha-\beta \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta - 1 + 2 + \beta = 0 \\ 4\alpha + \beta - 5 + 5\alpha + 5\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1-3\beta}{2} \\ 9 - 27\beta + 14\beta - 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -\frac{1}{13} \\ \alpha = \frac{3}{5} \end{cases} \quad v = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3) Determinare i punti di intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ del luogo $\{[t+3 : t^2-2 : t+4] : t \in \mathbb{R}\}$ con la retta passante per i punti $[2:3:-1]$ e $[-4:1:3]$

Retta: proiezione piano generato da $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$

punto $\in$ retta se $\begin{pmatrix} t+3 \\ t^2-2 \\ t+4 \end{pmatrix} \in \text{span}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}\right)$

cioè $\det \begin{pmatrix} t+3 & 2 & -4 \\ t^2-2 & 3 & 1 \\ t+4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 0$

$\det = -2(t-15)(t+3) = 0 \quad \begin{matrix} t=-3 \\ t=15 \end{matrix}$

I punti di intersezione sono $[1:8:23:19]$ $[0:7:1]$

4) Stabilire per quali $k$ è un'ellisse: $x^2 + 4xy + (k+1)y^2 + 4x + 2ky + 8 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & k-1 & k \\ 2 & k & 8 \end{pmatrix}$$

$d_1 > 0$

$d_2 = k - 5 \rightarrow k > 5$

$d_3 = -(k-6)^2$ sempre negativo

ellisse $d_2 > 0$ e $d_3 < 0$

Ellisse per $k > 5$ e $k \neq 6$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

5) Determinare il tipo affine della quadrica con
$z^2 - 8xy + 2xz - 4yz + 3x + y + z = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 3/2 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3/2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$d_2 < 0$
$d_3 = 8 + 8 - 16 = 0$
$d_4 \neq 0$ paraboloide iperbolico

6) Determinare i segni degli autovalori della matrice hessiana in $(0,0)$ della funzione
$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + e^{x-y}\cos(x+y)$

$\frac{\partial}{\partial x} = 3x + e^{x-y}\cos(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y)$

$\frac{\partial}{\partial y} = y - e^{x-y}\cos(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 3 + e^{x-y}\cos(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y) + e^{x-y}\cos(x+y) = 3 - 2e^{x-y}\sin(x+y)$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0) = 3$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = 1 + e^{x-y}\cos(x+y) + e^{x-y}\sin(x+y) + e^{x-y}\sin(x+y) - e^{x-y}\cos(x+y) = 1 + 2e^{x-y}\sin(x+y)$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(0,0) = 1$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = -e^{x-y}\cos(x+y) - e^{x-y}\sin(x+y) + e^{x-y}\sin(x+y) - e^{x-y}\cos(x+y) = -2e^{x-y}\cos(x+y)$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = -2$ $\quad H = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$d_1 = 3 > 0$
$d_2 = -1 < 0$
2 autovalori discordi $(+,-)$

7) Calcolare $\int_\alpha (3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy)$ $\quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6}t^2 \\ \sin\frac{\pi}{6}t^2 \end{pmatrix}$
con $t \in [0,1]$

$\int_\alpha d(x^3y^2)\,dx\,dy = x^3y^2 \Big|_{\alpha(0)=\binom{1}{1}}^{\alpha(1)=\binom{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{3}{4} - 1 = \frac{3 - 8\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}$

[2]

1) Stabilire per quali $k$ $\begin{pmatrix} 2k^2 & k-1 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile

È diagonale: autovalori $2k^2$, $k+1$

$2k^2 - k + 1 = 0$

$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$ $\nearrow 1$ $\quad \searrow -\frac{1}{2}$

È diagonalizzabile per $k \neq -\frac{1}{2}, 1$

$k = 1$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile

$k = -\frac{1}{2}$ $\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ NO $\quad \boxed{k \neq -\frac{1}{2}}$

2) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ 1 a span $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e aventi somma delle componenti 1

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \alpha - 2\beta + 1 - \alpha - \beta = 0 \\ 5\alpha + \beta - 4 + 4\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \beta = +\frac{1}{3} \\ 9\alpha + 5\beta - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow 27\alpha + 5 - 12 = 0$

$\alpha = \frac{7}{27}$

$1 - \alpha - \beta = 1 - \frac{7}{27} - \frac{1}{3} = \frac{27 - 7 - 9}{27} = \frac{11}{27}$

$v = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

3) Determinare i punti di intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ del luogo $\{[t+2 : t^2+3 : t+6] : t \in \mathbb{R}\}$ con la retta passante per i punti $[1,2,3]$ e $[3,-1,5]$

$\det \begin{pmatrix} t+2 & 1 & 3 \\ t^2+3 & 2 & -1 \\ t+6 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 0$

$\det = 3\det\begin{pmatrix} t^2+3 & 2 \\ t+6 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} t+2 & 1 \\ t+6 & 3 \end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} t+2 & 1 \\ t^2+3 & 2 \end{pmatrix} =$

$= 3(3t^2 - 3 - 2t) + (2t) + 5(2t + 1 - t^2) =$

$= 9t^2 - 9 - 6t + 2t + 10t + 5 - 5t^2 = 4t^2 + 6t - 4 = 0$

FASTCOPY
Tel. 050/556114

$4t^2 + 6t - 4 = 0$

$2(2t^2 + 3t - 2) = 2(t + \frac{1}{2})(t + 2)$

$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$ $\nearrow 1/2$ $\searrow -2$

$t = \frac{1}{2}$ $\quad t = -2$

I punti di intersezione sono:

$\left[\frac{5}{2}; \frac{13}{4}; \frac{13}{2}\right] = [10; 13; 26]$

$[0; 7; 4]$

4) Studiare per quali $h \in \mathbb{R}$ è un'ellisse

$x^2 + 4xy + (1+h)y^2 + 4x + 2hy + 4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1+h & h \\ 2 & h & 4 \end{pmatrix}$$

$d_1 > 0$

$d_2 = 1 + h - 4 = h - 3$

È un'ellisse per $d_2 > 0$ e $d_3 < 0$

$$d_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1+h & h & 2 & 1+h \\ 2 & h & 4 & 2 & h \end{pmatrix} = 4 + 4h + 4h + 4h - 16 - h^2 - 4 - 4h =$$

$= -h^2 + 8h - 16 = -(h^2 - 8h + 16)$

$= -(h-4)^2$ è sempre negativo

Ellisse per $h > 3$ e $h \neq 4$

5) Determinare il tipo affine della quadrica

$5x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 6yz + 2y = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$d_1 > 0$

$d_2 = 10 - 1 = 9 > 0$

$d_3 = 5\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} =$

$= 5 - 5 = 0$

$d_4 = \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 5\det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} =$

$= -25 \neq 0$

Autovalori: $+ + 0$

Paraboloide ellittico

6) Determinare i segni degli autovalori della matrice Hessiana in $(0,0)$ della funzione

$f(x,y) = 5y^2 + e^{2x-y}\cos(x+2y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2e^{2x-y}\cos(x+2y) - e^{2x-y}\sin(x+2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -e^{2x-y}\cos(x+2y) - 2e^{2x-y}\sin(x+2y) + 10y$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 4e^{2x-y}\cos(x+2y) - 2e^{2x-y}\sin(x+2y) - 2e^{2x-y}\sin(x+2y) - e^{2x-y}\cos(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(0,0) = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = e^{2x-y}\cos(x+2y) + 2e^{2x-y}\sin(x+2y) + 2e^{2x-y}\sin(x+2y) - 4e^{2x-y}\cos(x+2y) + 10$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(0,0) = 1 - 4 + 10 = 7$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = -2e^{2x-y}\cos(x+2y) - 2e^{2x-y}\sin(x+2y) + e^{2x-y}\sin(x+2y) - 2e^{2x-y}\cos(x+2y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0) = -2 - 2 = -4$$

$$H\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$ segni autovalori $(+,+)$ — autovalori positivi

$d_1 = 3 > 0$, $d_2 = -5 < 0$,

7) Calcolare $\int_\alpha (2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy)$ con $t \in [0,1]$, $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4}t^2 \\ \cos\frac{\pi}{6}t^2 \end{pmatrix}$

$$\int_\alpha d(x^2y^3)\,dx\,dy = x^2y^3 \Big|_{\alpha(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{\alpha(1)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} - 1 = \frac{3}{16}\sqrt{3} - 1$$