Nunzio Romeo

ESERCIZI PARTE A

di Ylaria

① TROVA GLI AUTOVALORI E UNA BASE CHE DIAGONALIZZA.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 3 & -5\end{pmatrix}$$

$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$

$det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

$tr(A) = -3$
$det(A) = -28$

POLINOMIO CARATTERISTICO: $t^2 - t\cdot(trA) + detA = 0$

$t^2 + 3t - 28 = 0$

$t = \begin{cases} -7 & \lambda_1 \\ 4 & \lambda_2 \end{cases}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Una base che diagonalizza:

λ_1: $2x+6y = -7x$
$6y = -9x$

$\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

λ_2: $2x+6y = 4x$
$2x = 6y$

$\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

cerca sempre di avere 1 (o positivo) !!

Base $\rightarrow \begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

SE FOSSE 3x3 $\rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & 5 & 5\\ 6 & 7 & 3\end{pmatrix}$

POLINOMIO CARATTERISTICO

$\longrightarrow det\begin{pmatrix}t-2 & -1 & -4\\ -4 & t-5 & -5\\ -6 & -7 & t-3\end{pmatrix}$

Sulla diagonale: $t-(n°)$
gli altri n°: cambio segno

↳ E TROVI I VALORI DI t (cioè gli autovalori)

(*) SE CHIEDE BASE ORTONORMALE CHE DIAGONALIZZA

↓

Faccio lo stesso procedimento e poi moltiplico la base trovata x la norma di ciascun vettore

ex. $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+9}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

(2) PER QUALI t È PRODOTTO SCALARE?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 1 & t & 1 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 & 1 \\ 1 & t \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

È PRODOTTO SCALARE SE:

- SIMMETRICA
- n° diagonale POSITIVI
- ttt i determinanti >0

- simmetrica ✓
- $t>0$
- $d_1>0$

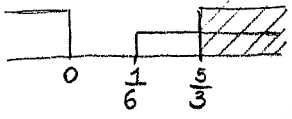
$d_2>0 \qquad 6t-1>0 \qquad t>\frac{1}{6}$

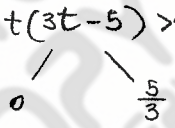
$d_3>0$

$6t^2+3+3-9t-6-t>0$

$6t^2-10t>0$

$t(3t-5)>0$





$$\left\{ t > \frac{5}{3} \right\}$$

(3) PER QUALI k AMMETTE UNA BASE ORTONORMALE?

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 3-2k \\ 1+k & 1-k^3 \end{pmatrix}$$

DEV'ESSERE SIMMETRICA:

$1+k = 3-2k$

$\left\{ k = \frac{2}{3} \right\}$

OPPURE si può VERIFICARE:

$$A \cdot A^* - A^* \cdot A$$

INVERTO RIGHE x COLONNE:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -2i & 4-3i \end{pmatrix}$$

→ gli cambio di posto

→ Alla parte immaginaria cambio segno !!

ex. $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 2 & 4+3i \end{pmatrix}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

④ PER QUALI t la matrice ha una BASE ORTONORMALE complessa di AUTOVETTORI e AUTOVALORI IMMAGINARI PURI ?

$$A = \begin{pmatrix} t+2 & -4 \\ t^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^* = -A}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{t+2} & \boxed{t^2} \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-t-2} & \boxed{4} \\ -t^2 & 0 \end{pmatrix}$$

A^* $\qquad$ $-A$

PONGO i N° NELLE STESSE POSIZIONI UGUALI E TROVO IL VALORE di t

$$\begin{cases} t^2 = 4 \\ t+2 = -t-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \pm 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\{ t = -2 \}$$

FASTCOPY
Tel. 050/556414

⑤ TROVA IL PNT avente MINIMA DISTANZA da $-1e_1 + 4e_2 + 5e_3$

di $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$

$$W = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_W(V) = V - \frac{\langle V | W \rangle}{\|W\|^2} \cdot W}$$

$$P_W(V) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left(\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{-3 - 4 + 20}{26} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

⑥ CALCOLA L'ANGOLO tra i VETTORI

$V=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $W=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

↳ $\vartheta = \arccos \dfrac{\langle V | W \rangle}{\|V\| \cdot \|W\|}$

$\vartheta = \arccos \dfrac{\langle \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{1+25}} = \arccos \dfrac{-3+20}{5\sqrt{26}} = \arccos \dfrac{17}{5\sqrt{26}}$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

OPPURE

L'ANGOLO TRA LE MATRICI

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{pmatrix}$ considero come 4 vettori

$\vartheta = \arccos \dfrac{\langle A | B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|} = \dfrac{\overbrace{2(1)+0(1)}^{①} + \overbrace{1(3)+(-2)0}^{②}}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \arccos \dfrac{5}{3\sqrt{11}}$

⑦ PER QUALI k la matrice è DIAGONALIZZABILE ?

↳ cioè deve essere SIMMETRICA

$A=\begin{pmatrix}k^2 & k+1\\0 & k+2\end{pmatrix}$

↳ DEVONO ESSERE UGUALI !!

$k+1=0$

$k=-1$

↓ VERIFICO:

$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ✓

(8) Det. i pnt di INTERSEZIONE

(a) $[\overset{x}{t-1}, \overset{y}{t+2}, \overset{z}{t}]$ & l'INSIEME dei pnt all'∞ di $x^2+3xy-2yz+7x=12$

↓ SOSTITUISCO IN

(↓ mi INTERESSA SOLO LA QUADRICA!!)

$x^2+3xy-2yt=0$

$(t-1)^2+3(t-1)(t+2)-2t(t+2)=0$

$t=\frac{3\pm 7}{4}=\begin{cases}-1\\ \frac{5}{2}\end{cases}$

PERCIÒ → $[-1-1:-1+2:-1]$ e $[\frac{5}{2}-1:\frac{5}{2}+2:\frac{5}{2}]$

$[-2:1:-1]$ $\quad [\frac{3}{2}:\frac{9}{2}:\frac{5}{2}]$ ✓

(b) $[t:t-8:4]$ & $[2-\tau:3:t-5]$

↓ gli Cambio variabile (la chiamo q)

$$\begin{vmatrix} t & 2-q \\ t-8 & 3 \\ 4 & q-5 \end{vmatrix}$$

$\det \square = 3t-(t-8)(2-q)=0$

$t=\frac{8q-16}{1+q}$

$\det \square = (t-8)(q-5)-12=0$

$tq-5t-8q+40-12=0$

$$\begin{cases} t=\frac{8q-16}{1+q} \\ tq-5t-8q+28=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=2 \\ q=3 \end{cases}$$

⇓ sostituisco

$(t=2)$ $\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}$ e $(q=3)$ $\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$

DEVO OTTENERE LO STESSO PNT (magari PROPORZIONALI!)

MASTER COPY
Tel. 388/9837745
master copy COPISTERIA 050/8312126 388/9837745