Sovrapposizione di onde armoniche

- Considero delle onde armoniche polarizzate linearmente lungo la stessa direzione che attraversano la stessa regione di spazio e si propagano in direzione quasi coincidente

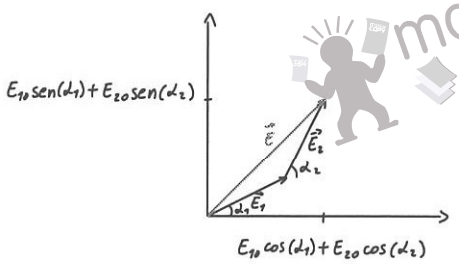
$$\rightarrow \vec{E}_1 = E_{10}\cos\left(\frac{\omega_1}{v_1}\vec{I}_1\cdot\vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1\right)\hat{e} \quad , \quad \vec{E}_2 = E_{20}\cos\left(\frac{\omega_2}{v_2}\vec{I}_2\cdot\vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2\right)\hat{e} \qquad \text{con } \vec{I}_1 \simeq \vec{I}_2$$

CASO 1: stessa Frequenza ($\omega_1 = \omega_2$) $\|$ Interferenza

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_{10}\cos(\alpha_1 - \omega t) + E_{20}\cos(\alpha_2 - \omega t) \quad \text{con} \quad \alpha_1 = \frac{\omega_1}{v_1}\vec{I}_1\cdot\vec{r} + \varphi_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\omega_2}{v_2}\vec{I}_2\cdot\vec{r} + \varphi_2$$

↓ Faccio la somma vettoriale nel piano complesso

$$\vec{E} = E_0\cos(\alpha - \omega t)$$



$$E_0 = \sqrt{\left(E_{10}\cos(\alpha_1)+E_{20}\cos(\alpha_2)\right)^2 + \left(E_{10}\text{sen}(\alpha_1)+E_{20}\text{sen}(\alpha_2)\right)^2}$$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{E_{10}\text{sen}(\alpha_1)+E_{20}\text{sen}(\alpha_2)}{E_{10}\cos(\alpha_1)+E_{20}\cos(\alpha_2)}\right)$$

$$\vec{\beta} = \frac{\hat{I}\wedge\vec{E}}{v(\omega)} = \frac{n(\omega)}{c}E_0\cos(\alpha - \omega t)(\hat{I}\wedge\hat{e})$$

$$\vec{S} = \vec{E}\wedge\vec{H} = \vec{E}\wedge\frac{\vec{\beta}}{\mu_0} = n(\omega)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\cos^2(\alpha - \omega t)\hat{I} \rightarrow S_{AVG} = n(\omega)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\frac{1}{2}$$

Sostituisco E_0 $\rightarrow$ $S_{AVG} = n(\omega)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{1}{2}\left(E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20}\cos(\alpha_1 - \alpha_2)\right)$

chiamo $S_{AVG_1} = n(\omega)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{1}{2}E_{10}^2$ e $S_{AVG_2} = n(\omega)\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{1}{2}E_{20}^2$

$$\Rightarrow S_{AVG} = S_{AVG_1} + S_{AVG_2} + \underbrace{2\sqrt{S_{AVG_1}S_{AVG_2}}\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\text{termine dovuto all'interferenza}}$$

$$\rightarrow \Delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{n(\omega)\,\omega}{c}\left[(\hat{I}_1 - \hat{I}_2)\vec{r}\right] + \underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{\text{sfasamento iniziale}}$$

- Abbiamo quindi che l'**intensità di radiazione luminosa** delle singole onde è costante nello spazio mentre quella dell'onda risultante dall'interazione delle due non lo è, infatti è presente un termine che dipende da "r" (Δ funzione di r)
- Si può avere interferenza costruttiva o interferenza distruttiva

$\Delta = \pm 2\pi N \rightarrow$ INTERFERENZA COSTRUTTIVA $\|$ Si ha intensità MAX, quindi $\cos(.) = 1$

$\Delta = \pm 2\pi N + \pi \rightarrow$ INTERFERENZA DISTRUTTIVA $\|$ Si ha intensità min, quindi $\cos(.) = 0$

quindi ci sono regioni con intensità luminosa maggiore e regioni in cui invece è minore (esperimento di Thomas Young)

Quando si ha interferenza tra le onde? L'interferenza si può avere in condizioni di sfasamento costante (coerenza), stessa polarizzazione e frequenza

CASO 2: stessa Frequenza ($\omega_1 = \omega_2$), stessa ampiezza e versi opposti, ‖ Onda stazionaria

$$\vec{E} = \left[E_1 \cos\left(\frac{\omega}{v}\hat{\imath}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_1\right) + E_1 \cos\left(-\frac{\omega}{v}\hat{\imath}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi_2\right)\right]\hat{e}$$

Scelgo poi un sistema di riferimento tale che $\hat{\imath}\cdot\vec{r} = x$ per semplicità

Pongo:

$$\alpha = \frac{\omega}{v}x - \omega t + \varphi_1 = \frac{n(\omega)\omega}{c}x - \omega t + \varphi_1 \quad , \quad \beta = -\frac{\omega}{v}x - \omega t + \varphi_2 = -\frac{n(\omega)\omega}{c}x - \omega t + \varphi_2$$

- Non è detto che le due onde abbiamo la stessa fase in ogni istante e punto dello spazio

quindi

$$\vec{E} = E_1\left(\cos(\alpha) + \cos(\beta)\right)\hat{e} = E_1\, 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\hat{e} =$$

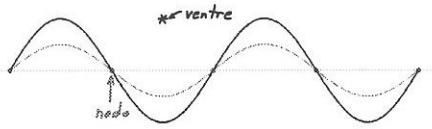
$$= 2E_1 \cos\left(-\omega t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{n(\omega)\omega}{c}x + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\hat{e}$$

- Quindi dipendenza temporale e dipendenza spaziale sono separabili

$$\vec{E} = A(x)\cos\left(-\omega t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\hat{e}$$

$$\rightarrow A(x) = 0 \quad \text{se} \quad \left(\frac{n(\omega)\omega}{c}x + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) = \pm N\pi + \frac{\pi}{2} \;\|\; \text{NODI}$$

$$\rightarrow A(x) = MAX \quad \text{se} \quad \left(\frac{n(\omega)\omega}{c}x + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) = \pm 2N\pi \;\|\; \text{VENTRI}$$



CASO 3: stessa ampiezza e Frequenze diverse ‖ Battimenti

$$\vec{E} = E_1\left[\cos(k_1 x - \omega_1 t + \varphi_1) + \cos(k_2 x - \omega_2 t + \varphi_2)\right]\hat{e}$$

↓ prostaferesi

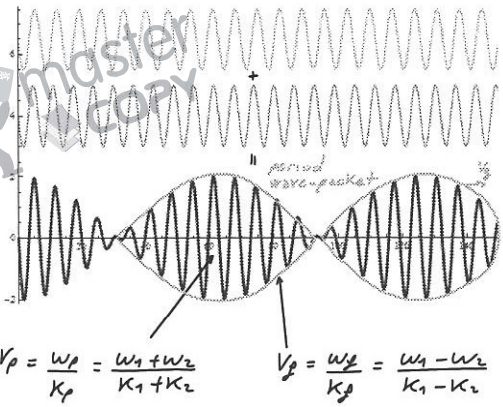
$$\vec{E} = 2E_1 \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\hat{e}$$

pongo $k_p = \frac{k_1+k_2}{2}$, $\omega_p = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, $\varphi_p = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ e $k_g = \frac{k_1-k_2}{2}$, $\omega_g = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$, $\varphi_g = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$ ‖ "p" indica PORTANTE, "g" indica GRUPPO

quindi

$$\vec{E} = 2E_1 \cos(k_p x - \omega_p t + \varphi_p)\cos(k_g x - \omega_g t + \varphi_g)\hat{e}$$

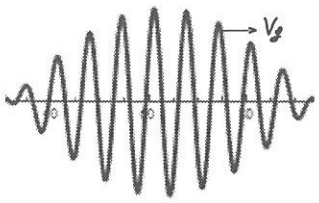
- L'onda risultante oscilla velocemente alla **pulsazione della portante** ω_p ed ha un'ampiezza che è determinata dall'oscillazione alla **pulsazione di gruppo** ω_g, quindi l'ampiezza dell'onda portante è modulata da un'onda che oscilla ad una pulsazione minore
  - L'oscillazione più veloce è dovuta alla pulsazione della portante (maggiore), mentre quella più lenta è dovuta alla pulsazione di gruppo (minore)
  - L'informazione da trasmettere è quella legata alla modulazione dell'ampiezza dell'onda



$$v_p = \frac{\omega_p}{k_p} = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} \qquad v_g = \frac{\omega_g}{k_g} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2}$$

Dispersione

- La sovrapposizione di un numero elevato di onde con frequenze molto vicine e ampiezze diverse può originare un singolo pacchetto d'onda



$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(Vk)}{dk} = V + k\frac{dV}{dk} = V + k\frac{d}{dk}\left(\frac{c}{n(\omega)}\right) = V - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{dk} = V\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right)$$

velocità di gruppo nei dielettrici isotropi

dielettrico isotropo $\rightarrow V = \frac{c}{n(\omega)}$ Indice di rifrazione

Quando si ha la sovrapposizione di onde di questo tipo si deve tener conto sia della velocità di fase che di quella di gruppo; infatti quest'ultima costituisce la velocità dell'inviluppo della sovrapposizione di onde che costituiscono la portante, ognuna delle quali ha una propria velocità di fase

$\frac{dn}{dk} > 0 \Rightarrow V_g < V$ DISPERSIONE NORMALE (maggioranza dei casi) $\| V_p \neq V_g$

$\frac{dn}{dk} < 0 \Rightarrow V_g > V$ DISPERSIONE ANOMALA

master COPY

Indice di rifrazione per la velocità di gruppo

master COPY COPISTERIA

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\lambda_0}\frac{d\lambda_0}{dk} \quad \text{ma}$$

$\rightarrow \omega = ck_0 = c\frac{2\pi}{\lambda_0}$ nel vuoto, allora $\frac{d\omega}{d\lambda_0} = \frac{d}{d\lambda_0}\left(c\frac{2\pi}{\lambda_0}\right) = -\frac{c2\pi}{\lambda_0^2}$

$\rightarrow k = k_0 n(\lambda_0) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(\lambda_0)$ perché $k = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ con $k_0 = \frac{\omega}{c}$, allora $\frac{dk}{d\lambda_0} = \frac{d}{d\lambda_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n(\lambda_0)\right) =$

$$= -\frac{2\pi}{\lambda_0^2} n(\lambda_0) + \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda_0}$$

quindi

$$V_g = \frac{-\frac{c2\pi}{\lambda_0^2}}{-\frac{2\pi}{\lambda_0^2} n(\lambda_0) + \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda_0}} = \frac{c}{n(\lambda_0) - \lambda_0\frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda_0}}$$

allora definisco: $N_g = n(\lambda_0) - \lambda_0\frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda_0}$ $\|$ Indice di rifrazione di gruppo

master COPY

Polarizzazione di onde armoniche

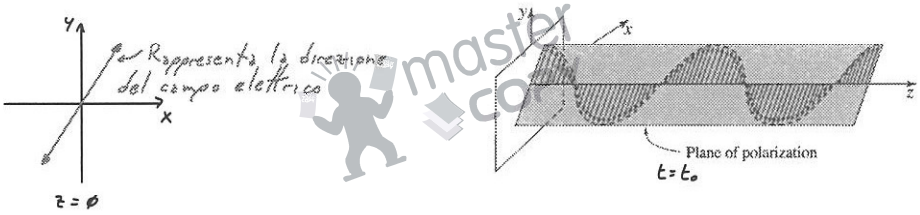
- Considero un'onda che si propaga lungo l'asse z

$E_x = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$, $E_y = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$, $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ e $-\pi < \varphi \leq \pi$

→ Per semplicità considero il piano a $z = 0$

CASO 1: Polarizzazione lineare

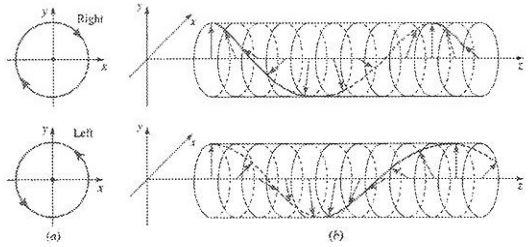
$E_x = A_x \cos(\omega t + \varphi)$, $E_y = \pm A_y \cos(\omega t + \varphi)$, $\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\frac{E_y}{E_x} = \pm \frac{A_y}{A_x}$



- La direzione del campo elettrico è sempre la stessa, l'ampiezza invece varia al variare del tempo
- La pendenza della retta, che rappresenta la direzione del campo elettrico, dipende dal rapporto tra le ampiezze delle componenti del campo elettrico considerate allo stesso tempo $t=t_0$ e sul piano xy (z=0)

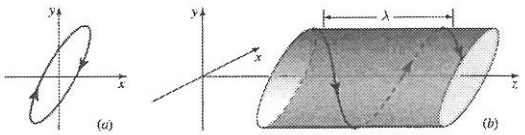
CASO 2: Polarizzazione circolare

$E_x = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$, $E_y = \mp A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $E_x^2 + E_y^2 = A_0^2$



CASO 3: Polarizzazione ellittica

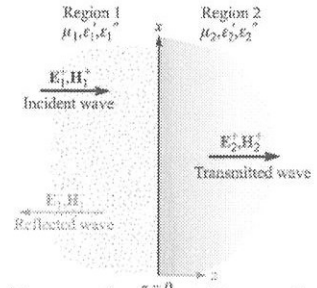
$E_x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$, $E_y = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{\cos\varphi}{A_x A_y} E_x E_y = \operatorname{sen}^2\varphi$



z=0 $\qquad$ $t=t_0$

Riflessione

- INCIDENZA NORMALE: considero un'onda che si propaga lungo l'asse z e incide sulla superficie di separazione (lungo x) tra due mezzi con caratteristiche diverse



Mezzo 1 : $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$, $E^+_{xs_1}$ = Fasore campo elettrico incidente
$H^+_{ys_1} = \frac{1}{\eta_1} E^+_{xs_1}$ = Fasore campo magnetico incidente

Mezzo 2 : $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$, $E^+_{xs_2}$ = Fasore campo elettrico trasmesso
$H^+_{ys_2} = \frac{1}{\eta_2} E^+_{xs_2}$ = Fasore campo magnetico trasmesso

Mezzo 1 | Mezzo 2

- **Condizioni al contorno**
  1. Continuità della componente tangenziale di E (sempre vera) —> $E^1_{\parallel} = E^2_{\parallel}$
  2. Continuità della componente tangenziale di H (se correnti nulle) —> $H^1_{\parallel} = H^2_{\parallel}$

- Si ipotizza che siano presenti solo la componente di onda incidente e trasmessa (non considero quella riflessa)

→ Per l.c. (1) => $E^+_{xs_1} = E^+_{xs_2}$ perché i due campi sono paralleli a x lungo il quale si trova la superficie di separazione

→ Per l.c. (2) => $H^+_{ys_1} = \frac{1}{\eta_1} E^+_{xs_1} = \frac{1}{\eta_2} E^+_{xs_2}$ perché i campi sono lungo y paralleli al piano di separazione

Allora l'unica sol.ne è che $\eta_1 = \eta_2$, ovvero che i due mezzi in realtà sono lo stesso mezzo

- Quindi ne consegue che, in presenza di due mezzi diversi si deve necessariamente ammettere la presenza di una componente riflessa per poter verificare le condizioni al contorno

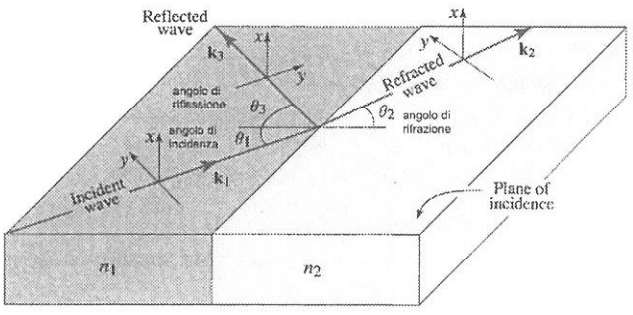
$E^-_{xs_1}$ = Fasore campo elettrico riflesso , $H^+_{ys_1} = -\frac{1}{\eta_1} E^+_{xs_1}$ = Fasore campo magnetico riflesso

- Il segno "-" è necessario per avere il vettore di Poynting diretto verso -z, perché la direzione del vettore di Poynting dipende dal "-" che si ottiene nelle equazioni di Maxwell quando si scrive B in funzione di E
- Le condizioni al contorno diventano

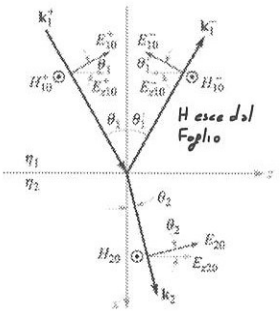
(1) $E^+_{xs_1} + E^-_{xs_1} = E^+_{xs_2}$

(2) $\frac{1}{\eta_1} E^+_{xs_1} - \frac{1}{\eta_1} E^-_{xs_1} = \frac{1}{\eta_2} E^+_{xs_2}$

- INCIDENZA OBLIQUA:



→ Polarizzazione TM o parallela



→ Polarizzazione TE o ortogonale

