ALGEBRA LINEARE - Mario Poletti

⇒ 1ª lezione - 27/10/10 ANELLI

MASTER COPY
- Tel. 388/9837745

SITO UTILE: www.dma.unipi.it
↳ Cliccare "Persone" e cercare "Mario Poletti"

- $A \begin{cases} \text{INSIEME} \\ \neq \emptyset \end{cases}$

Inseriamo nell'insieme delle operazioni:

$+, \cdot$

$\forall (a, b) \in A \quad a+b \in A$
$\qquad\qquad\quad a \cdot b \in A$

(a destra si esemplifica ciò che è scritto a sinistra)

$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \text{ sono INTERI PARI} \right\}$

$\begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \in A_1 \qquad 8 \notin A_1$ (perché non è una TABELLINA)

$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 8 & \pi \end{pmatrix} \notin A_1$

es $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}_{\in A_1}$ e $\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}_{\in A_1}$

- $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & c+z \\ b+y & d+t \end{pmatrix}$

Il risultato appartiene sempre ad A_1 perché la somma di due numeri pari è sempre un numero pari.

- $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & az+ct \\ bx+dy & bz+dt \end{pmatrix}$

- Queste due operazioni godono di una qualche proprietà?

① $+ \begin{cases} \text{ASSOCIATIVA} \\ \text{COMMUTATIVA} \\ \exists\, 0 \in A, \text{ neutro per } + \quad [\text{teorema: } 0 \text{ è UNICO} \rightarrow \text{vedi pag. ②}] \\ \forall\, a \in A, \exists \text{ un opposto, } a', \text{ tale che } a+a' = 0 \quad [\text{teorema: } a' \text{ è unico} \rightarrow \text{vedi pag. ②}] \end{cases}$

— ADDIZIONE —

- Come facciamo però ad essere sicuri che ω sia l'unico elemento neutro per il $+$?

Supponiamo per assurdo ne esistano due, ω e η. Ora:

$\omega + \eta = \omega$ (se considero ω un elemento a caso di A e η l'elemento neutro)

ma anche:

$\omega + \eta = \eta$ (se considero η un elemento a caso di A e ω l'elemento neutro)

Quindi $\omega = \eta$, ed ω è unico! (ci siamo serviti della proprietà commutativa)

N.B.: d'ora in poi indichiamo l'elemento neutro dell'insieme A con 0_A!

- $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \overset{?}{\begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}} = 0$

→ chiamiamo questa tabellina OPPOSTO della prima e la indichiamo con a'

Dimostriamo per assurdo che a' è unico:

$a \in A$ $\quad a'$ e a'' opposti di a

$$\begin{array}{ccc} (a' + a) + a'' & = & a' + (a + a'') \\ \| & & \| \\ 0 + a'' & & a' + 0 \\ \| & & \| \\ a'' & & a' \end{array}$$

→ quindi $a' = a''$ e l'opposto è UNICO!

(ci siamo serviti della proprietà associativa)

N.B.: d'ora in poi indichiamo l'elemento annullante (opposto) con $-a$!

② - { ASSOCIATIVA — MOLTIPLICAZIONE
{ DISTRIBUTIVA a DESTRA rispetto all'ADDIZIONE
{ DISTRIBUTIVA a SINISTRA rispetto all'ADDIZIONE

N.B.! ⌐ in inglese RING

Definizione di ANELLO: l'insieme A è un ANELLO se è un insieme non vuoto, in cui sono state introdotte due operazioni, $+$ e $\cdot$. L'addizione deve essere associativa, commutativa e deve avere un elemento neutro e uno opposto. La moltiplicazione deve essere distributiva a dx e a sx rispetto al

- Ad esempio, l'insieme $\mathbb{N}$ non è un anello, mentre $\mathbb{Z}$ lo è.

- Osserva:

$0 \cdot a = ?$

$0 \cdot a = (0+0)a = 0a + 0a$

$\underbrace{0 \cdot a}_{\lambda}$

$\lambda = \lambda + \lambda$

$\lambda + (-\lambda) = (\lambda + \lambda) + (-\lambda)$

$0 \qquad\qquad \lambda$

$\lambda = 0$

quindi: $0 \cdot a = 0$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

- Osserva ancora che:

$a \cdot (-b) \overset{?}{=} -(ab)$

$0 = a \cdot 0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b)$

quindi: $a(-b) = -ab$, cioè è l'opposto di ab

N.B.: per convenzione $a - b = a + (-b)$

- A anello $(+, \cdot)$

$A_1 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x & 2z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

N.B.: $u \in A$ si chiama <u>IDENTITÀ</u> di A se $\forall a \in A \quad ua = au = a$; l'identità di A si indica con 1.

In A_1 ad esempio non c'è alcuna identità. → non è infatti detto che ci sia

{ Dimostriamo che, se esiste, l'identità di un anello è <u>unica</u>:

u, v identità di A → $uv = u$, ma anche $uv = v$, quindi $u = v$. (vedi dim. pag. ②)

- Creiamo un nuovo anello:

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

Questo anello (cioè l'insieme delle matrici composte da numeri interi) ha come identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, perché:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{A_2}$$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

- Si nota che:

$$i \cdot i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1_{A_2}$$

$$\left[\text{definendo } i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

- N.B.: il prodotto tra tabelline (matrici) NON è commutativo.

es. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \neq$$

Se la moltiplicazione all'interno dell'anello è commutativa si parla di ANELLO COMMUTATIVO.

- Quindi:

$\mathbb{Z}$ è un anello commutativo con identità.

A_1 è un " non commutativo con identità.

A_2 è un " " " senza "

⇒ 2ª lezione - 28/10/10 ANELLI 2, CAMPI

- Prendiamo un anello A (con identità); supponiamo che lo 0 (dell'addizione) coincida con l'1 (della moltiplicazione).

$0 = 1$ elem. neutro.

$a \in A$

$a = 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Questo anello è quindi $A = \{0\}$

Questo tipo di anelli è detto ANELLO BANALE, cioè è un anello con un solo elemento

- Prendiamo quindi un anello A non banale, con identità.

$\lfloor 0 \neq 1$

$a \in A$

se $\exists\, b \in A$ t.c. $ab = 1$, l'elemento a prende il nome di inverso a sinistra di b e

" b " " " " a destra di a.

- Prendo $a \in A$.

Se $\exists$ a' inverso sinistro
$\exists$ a'' inverso destro
$\Rightarrow$ l'elem. a è INVERTIBILE e si può chiamare UNITÁ di A.

le unità di un anello sono elementi interessanti.

N.B.! IDENTITÁ : elemento neutro rispetto al prodotto
UNITÁ : elem. invertibile in A

ACHTUNG! talvolta però le definizioni sono scambiate!