# PROBLEMA DI CONTROLLO

Dato uno stato di partenza $x'$ al tempo $\tau_1$ e uno stato di arrivo $x''$ al tempo $\tau_2 > \tau_1$, siamo interessati a trovare un ingresso $u(\tau)$, con $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ che porti lo stato del sistema da $x'$ a $x''$

La soluzione esiste se
- $x'' \in R(x', \tau_1, \tau_2)$
- $x' \in C(x'', \tau_1, \tau_2)$

Ci chiediamo quindi come sono fatti $R(x', \tau_1, \tau_2)$ e $C(x'', \tau_1, \tau_2)$.
Sappiamo che

$$R(0, \tau_1, \tau_2) = \left\{ x : x = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{A(\tau_2 - \tau)} B u(\tau) \, d\tau \quad \forall u(\tau) \right\}$$

Sappiamo anche che l'insieme degli spazi raggiungibili da $0$ (cioè il precedente insieme) è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

Ricordiamo inoltre che $x$ si può esprimere mediante il <u>Grammiano di raggiungibilità</u>

$$x \in \text{Im} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{A(\tau_2 - \tau)} B B^T e^{A^T(\tau_2 - \tau)} d\tau \right\}$$

Sappiamo anche che

$$x \in \text{Im} \left\{ [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B] \right\}$$

$\downarrow$

questa immagine è indipendente da $\tau_1$ e $\tau_2$, quindi se lo stato è raggiungibile in $\tau_1$ e in $\tau_2$ lo sarà in tutti gli altri istanti di tempo

Considerando invece l'insieme degli stati controllabili in $0$

$$C(0, \tau_1, \tau_2) = \left\{ x : 0 = e^{A(\tau_2 - \tau_1)} x + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dots d\tau \right\}$$

che si può ricavare dall'inversa del Gramiano di controllabilità

$$C(0,\tau_1,\tau_2) = \lim \left\{ \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_0-\tau)} BB^{\tau} e^{A(\tau_0-\tau)} d\tau \right\}$$

Inoltre se abbiamo un SLTI

$$C(0,\tau_1,\tau_2) = R(0,\tau_1,\tau_2) \Rightarrow C(0) = R(0)$$

sono quindi sottospazi coincidenti indipendenti dall'intervallo $[\tau_1, \tau_2]$

A partire da questi risultati possiamo calcolare quindi l'insieme degli stati controllabili in $x''$ e raggiungibili da $x'$
Andiamo quindi a vedere come sono fatti $R(x^*, \tau_1, \tau_2)$ e $C(x^*, \tau_1, \tau_2)$

Vale il TEOREMA: se $x^* \in R(0) = C(0)$ allora

$$R(x^*, \tau_0, \tau_1) = C(x^*, \tau_0, \tau_1) = R(0) = C(0)$$

dim
Vogliamo dimostrare che

(1) $R(0) \subseteq R(x^*, \tau_0, \tau_1)$ (3) $R(0) \supseteq R(x^*, \tau_0, \tau_1)$

(2) $R(0) \supseteq C(x^*, \tau_0, \tau_1)$ (4) $R(0) \subseteq C(x^*, \tau_0, \tau_1)$

Cominciamo dalla (1)

$R(0) \subseteq R(x^*, \tau_0, \tau_1)$: se $x' \neq x^*$ e $x' \in R(0) \Rightarrow x' \in R(x^*, \tau_0, \tau_1)$

Sappiamo per ipotesi che $x^* \in R(0)$ e ciò implica che $x^* \in C(0)$ — ciò significa che $\exists$ un ingresso $u'(\tau)$ tale che

$$0 = e^{A(\tau_1-\tau_0)} x^* + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Uso quindi l'equazione di Lagrange

Se quindi anche $x' \in R(\emptyset)$ allora $\exists$ un $u''(\tau)$ tale che

$$x' = \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - \tau)} B u''(\tau)\, d\tau$$

Se prendiamo le due soluzioni che abbiamo trovato e le sommiamo troviamo che

$$x' = e^{A(\tau_1 - \tau_0)} x^* + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - \tau)} B(u'(\tau) + u''(\tau))\, d\tau$$

Quindi se $x'$ è raggiungibile dall'origine, allora sarà raggiungibile anche da $x^*$, a patto ovviamente che anche $x^*$ sia raggiungibile dall'origine.

Possiamo ora dire (2)

$R(\emptyset) \supseteq R(x^*, \tau_0, \tau_1)$ — cioè se ho $x' \in R(x^*, \tau_0, \tau_1) \Rightarrow x' \in R(\emptyset)$

Pongo

$$x' = \underbrace{e^{A(\tau_1 - \tau_0)} x^*}_{\in R(\emptyset)} + \underbrace{\int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - \tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{\in R(\emptyset)}$$

$u(\tau)$: $\exists$ per ipotesi

sfruttiamo la A-invarianza

$x^* \in R(\emptyset)$ per ipotesi del teorema

$\in R(\emptyset)$ — lo posso affermare con certezza perché è la definizione stessa di spazio raggiungibile

$$e^{A \cdot \delta\tau} \;\forall\, \delta\tau = I + A\,\delta\tau + \frac{A^2}{2!}\delta\tau^2 + \dots$$

I termini moltiplicativi fanno variare i valori della matrice A ma la struttura della matrice resta la stessa

$$e^{A\delta\tau} \cdot x^* = I x^* + A \cdot \delta\tau \cdot x^* + \frac{A^2}{2!} \cdot \delta\tau^2 \cdot x^{*2} + \dots$$

se $x^* \in R(\emptyset)$ anche $I \cdot x^* \in R(\emptyset)$ per la definizione di sottospazio

vettoriale e lo stesso vale per tutti i termini successivi.
Di conseguenza avremo che $x' \in R(\emptyset)$ e così provo l'inclusione

Possiamo alla terza inclusione

(3) $R(\emptyset) \supseteq C(x^*, \tau_0, \tau_1)$

se $x' \in C(x^*, \tau_0, \tau_1) \Rightarrow x' \in R(\emptyset)$

$\exists u : \quad x^* = e^{A(\tau_1 - \tau_0)} x' + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - \tau)} B u(\tau)\, d\tau$

$$e^{A(\tau_1 - \tau_0)} x' = x^* - \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - \tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

$x^* \in R(\emptyset)$; $\int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - \tau)} B u(\tau)\, d\tau \in R(\emptyset)$; $x^* - \int \in R(\emptyset)$

Devo provare che $x' \in R(\emptyset)$. Se $e^{A(\tau_1 - \tau_0)} x' \in R(\emptyset) \Rightarrow x' \in R(\emptyset)$?

Fatta questa ipotesi posso prendere una base di $R(\emptyset)$ $\mathcal{B}$ ed esiste un

$$\eta : e^{A(\tau_1 - \tau_0)} x' = \mathcal{B}\eta$$

master COPY
master COPY COPISTERIA

(4) $R(\emptyset) \subseteq C(x^*, \tau_0, \tau_1)$ ⟶ se $x' \in R(\emptyset) \Rightarrow x' \in C(x^*, \tau_0, \tau_1)$

Prendo $x' \in R(\emptyset)$ e costruisco un altro stato

$$x'' = x^* - e^{A(\tau_1 - \tau_0)} x' \qquad \in R(\emptyset)$$

($x^* \in R(\emptyset)$; $e^{A(\tau_1-\tau_0)} x' \in R(\emptyset)$; la differenza $\in R(\emptyset)$)

Se $x'' \in R(\emptyset)$ allora $\exists u$:

$$x'' = \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1 - \tau_0)} B u(\tau) d\tau = x^* - e^{A(\tau_1-\tau_0)} x'$$

$$x^* = e^{A(\tau_1-\tau_0)} x' + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1-\tau_0)} B u(\tau) d\tau$$

questo dimostra che $x'$ è controllabile e $x^* \longrightarrow$ partendo da $x'$ ho trovato un ingresso che mi porta in $x^*$ — da $x^*$ posso andare in qualsiasi punto dello spazio raggiungibile e da qualsiasi punto dello spazio posso andare in $x^*$

Come sono fatti anche $R(x^*, \tau_0, \tau_1)$ e $C(x^*, \tau_0, \tau_1)$ se $x^* \notin R(\emptyset)$?
Per definizione sappiamo che

$$R(x^*, \tau_0, \tau_1) = \left\{ x : x = e^{A(\tau_1-\tau_0)} x^* + \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{A(\tau_1-\tau)} B u(\tau) d\tau \right\}$$

$\forall u(\tau)$

Se $x^* \notin R(\emptyset)$ posso dividerlo in due parti, uno $\in R(\emptyset)$ (potrebbe essere anche l'insieme vuoto) e uno appartenente al suo ortogonale

$$x^* = \underbrace{x^*_R}_{\in R(\emptyset)} + \underbrace{x^*_{\bar{R}}}_{\in \bar{R}(\emptyset)}$$

$\bar{R}(\emptyset)$ ⟶ insieme degli stati non raggiungibili