Cose non chiare

ARGOMENTO	DUBBIO
Bass-Gura f.	scrittura della matrice Adj (sI-A)
	Varietà lineare
Prob. lin. quad.	Chi ce lo dice che $\Psi_{12}^{-1}(t_f, t_0)$ sia invertibile?
ARE	Perchè (A,B) deve essere ragg? Non basta che la parte non ragg. sia convergente (poli negativi)?
Bass-Gura f.	Come scrivere la k quando ho più ingressi?

master COPY

- Problema lineare quadratico (LQ)
  - = analisi dei (soliti) quattro casi ⟶ scrittura della legge di controllo sia in funzione delle cond. iniz. che come retroazione dello stato

- Differential Riccati Equation (DRE)
- Lemma del "costo ottimo"
- Problema in cui porto $x(t_f)$ il più vicino possibile a x^*
- Inseguitore ottimo
- Proprietà di S (soluzione della DRE)
- Soluzione analitica della DRE
- Controllo in tempo infinito
  - = Algebric Riccardi Equation (ARE)
    - ≡ Proprietà della S_∞ e condizioni per trovare soluzione ottima
    - ≡ Vari metodi per il calcolo di S_∞
  - = Osservazioni sui pesi dei termini Q ed R sul controllo ottimo

Argomenti chiave

- dimostr. : se $x^* \in R(0) = C(0) \Rightarrow R(x^*, t_0, t_1) = C(x^*, t_0, t_1) = R(0) = C(0)$
- Varietà lineare $\mathcal{X}$ (spazio non raggiungibile)
- significato del Gramiano di raggiung. ⟶ costo in energia di controllo
- BASS-GURA formula ⟶ ◦ Teorema fondamentale assegnamento poli
- regolazione dell'uscita a un y_d (con e senza disturbi)
- Assegnamento poli con più ingressi (doppia retroazione)
- Ricostruzione dello stato - Gramiano di osservabilità
- Stima asintotica dello stato
  - condizioni di Luenberger
  - quando è possibile costruire uno stimatore as.
  - stimatore ridotto
  - verifica della dinamica del sistema con full-state feedback $u = k\hat{x}$
  - Principio di separazione degli autovalori

CONTROLLO OTTIMO:

- ripasso di analisi : concetti di norma, distanza, funzionale, variazione di J
- teorema fondamentale del calcolo delle variazioni ($\delta J(x^*, \delta x) = 0$ se x^* è estremale)
- equazione di Eulero.
  - = condizioni iniziali nel caso : (i) $x(t_f)$ e t_f dati
    (ii) $x(t_f)$ libero ; t_f fissato
    (iii) $x(t_f)$ fissato ; t_f libero
    (iv) $x(t_f)$ e t_f liberi

- problema di ottimizzazione vincolato
  - = ripasso molt. Lagrange
  - = vincolo algebrico, isoperimetrico e differenziale
- Problema di controllo ottimo
  - = funzione hamiltoniana
- Principio di Bellman

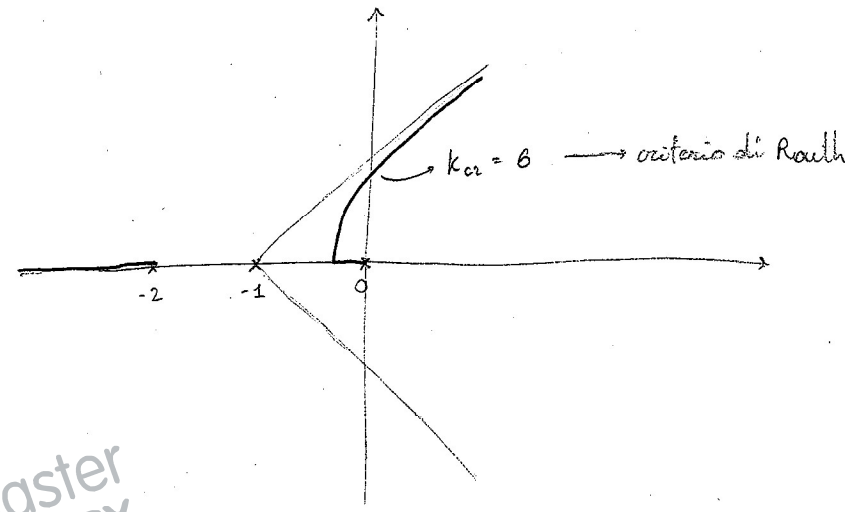
Esempi chiave
- $J = \frac{1}{2} c\, x(t_f)^2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\, dt \quad \dot{x} = u$
- $J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^t u\, dt \quad \dot{x} = Ax + Bu$

→ tre metodi diversi per la soluz.

Luogo delle radici:

esempio: $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$

$\sigma = \frac{\sum_n p_i - \sum_m z_i}{n-m} = -\frac{3}{3} = 1$



master COPY

Teoria del Controllo

master COPY

Ricevimento: Lunedì 13:30 - 18:30

Libro: "Optimal theory Control" - Kirk (manca la parte finale)

Problema del controllo: partiamo da un sistema che all'istante iniziale è x', t_0

OBIETTIVO: arrivare ad uno stato $x'', t_1 > t_0$

domanda 1: esiste una funzione $u(t)$ o una sequenza di ingressi (T.D.) assegnata agli ingressi che mi permetta di ottenere x'' a $t = t_1$? ($x'' \in R(x', t_0, t_1)$)

Devo conoscere la struttura di R (ne so qualcosa per i S.L.T.I. $\Rightarrow$ prendo il Gramiano)

$$R(0, t_0, t_1) = \mathrm{Im}\{G_R(t_0, t_1)\} = \mathrm{Im}\left\{\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau\right\} =$$

per sottolineare l'indipendenza dall'intervallo temporale

$$R(0) = \mathrm{Im}\{[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]\}$$

Gramiano di controllabilità identico ma con t_0 al posto di t_1 nell'esponenziale

master COPY

Vogliamo dim. che se $x^* \in R(0) \equiv C(0) \Rightarrow R(x^*, t_0, t_1) = C(x^*, t_0, t_1) = R(0) = C(0)$

hint: se riesco a dimostrare che $R(0) \underset{(i)}{\subseteq} R(x^*, t_0, t_1)$ e $R(x^*, t_0, t_1) \underset{(ii)}{\subseteq} R(0)$ è fatta (stesso per la controllabilità)

(i): scelgo $x' \neq x^*$ t.c. $x' \in R(0)$; se $x^* \in C(0) \Rightarrow \exists u'(t)$ t.c. $0 = e^{At}x^* + \int e^{A(t-\tau)} B u' \cdot d\tau$

$\hookrightarrow x' = e^{At}\cancel{0} + \int e^{A(t-\tau)} B u''(\tau)\, d\tau$ sommo le espressioni:

$$x' = e^{At}x^* + \int e^{A(t-\tau)} B[u' + u''](\tau)\, d\tau)$$

Partendo da $R(0) \equiv C(0)$ non posso "allontanarmi" da quella struttura (come stato)
↳ è l'idea del teorema che stiamo dimostrando (non posso uscire da questo insieme ⇒ sono ingabbiato)

dim di $R(0) \supseteq R(x^*, t_0, t_1)$ $\quad x' \in R(x^*, t_0, t_1) \Rightarrow x' = \underbrace{e^{At}x^*}_{\in R(0) \text{ per la A-invarianza}} + \underbrace{\int e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{\in R(0) \text{ (è praticamente } R(0))}$

(ii) $\Rightarrow x' \in R(0)$

$\Rightarrow$ C.V.D.

dim di $R(0) \supseteq C(x^*, t_0, t_1)$ $\quad x' \in C(x^*, t_0, t_1) \Rightarrow x^* = e^{At}x' + \int e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$

$$e^{At}x' = x^* - \underbrace{\int \ldots}_{\in R(0)} \Rightarrow x' \in R(0)$$

master COPY

dim di $R(0) \subseteq C(x^*, t_0, t_1)$ $\quad x' \in R(0) \Rightarrow x'' = x^* - e^{At}x' \in R(0)$

$\Rightarrow x'' = 0 + \int e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$ sostituendo troviamo $x^* = e^{At}x' + \int \ldots$

↑ applicazione della definizione di spazio raggiungibile

↳ x' appartiene agli stati controllabili da x^*

C.V.D.

Vediamo cosa succede se $x^* \notin R(0)$: $\left\{x : x(t_1) \overset{(i)}{=} e^{A(t_1-t_0)}x^* + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau)\, d\tau\right\} = R(x^*, t_0, t_1)$

Scriviamo $x^* = x^*_{R(0)} + x^*_{\bar{R}(0)}$ (proiezione sul sottospazio $R(0)$) (idea: caratterizzare a livello di spazi vettoriali l'insieme)

$$(i) = \underbrace{e^{A(t_1-t_0)}\left(x^*_R + x^*_{\bar{R}}\right) + \int \ldots}_{\in R(0)} = \underbrace{e^{A(t_1-t_0)}}_{\text{mai nullo}} x^*_{\bar{R}} + \underbrace{\eta}_{\in R(0)}$$

mai nullo: non può mai essere nullo dato che il vettore $0 \in R(0)$

→ non è uno spazio vettoriale ma è una VARIETÀ LINEARE

$$C(x^*, t_0, t_1) = \left\{x \mid x^* \overset{(ii)}{=} e^{A(t_1-t_0)}x + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau)\, d\tau\right\}$$

master COPY

Scriviamo nuovamente $x^* = x^*_c + x^*_{\bar{c}}$

(ii) moltiplicata x $e^{-A(t_1-t_0)}$: $e^{-A(t_1-t_0)}\left(x^*_c + x^*_{\bar{c}}\right) = x + e^{-A(t_1-t_0)} \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$

$$x = \underbrace{e^{-A(t_1-t_0)}x^*_c}_{\in R(0)} + e^{-A(t_1-t_0)}x^*_{\bar{c}} \underbrace{- e^{-A(t_1-t_0)}\int \ldots}_{\in R(0)} = e^{-A(t_1-t_0)}x^*_{\bar{c}} + \underbrace{\eta}_{\in R(0)}$$

esercizio: $\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$

Calcolare $R(0)$, $C(0)$, $R(x^*, t_0, t_1)$, $C(x^*, t_0, t_1)$ per $\begin{cases} x^* \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$

Graniamo: $[B \mid AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \equiv R^2 \Rightarrow C(0) = R^2 \Rightarrow$ per il teor.

Se $B^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow [B^* \mid AB^*] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathrm{Im}(R) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

Ragioniamo su $C(0)$: $0 = e^{At} x' + \int e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$

$$x' = -\int e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

$$e^{-A\tau} = e^{-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\tau} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\tau} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\tau} \cdot e^{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\tau} = \text{NAH}$$

metodo 1 $\Longrightarrow$ diagonalizzazione

metodo 2: $C(sI - A)^{-1}B$ ove $(sI - A)^{-1} = \mathcal{L}\{e^{At}\}$ $= G(s)$

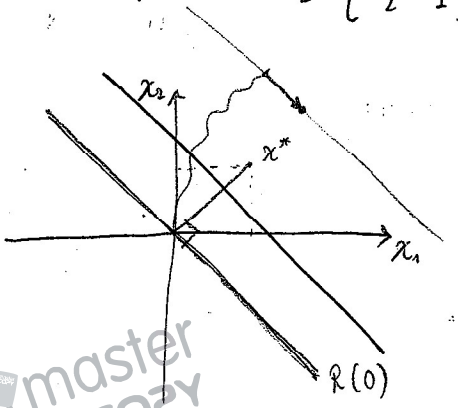
$$[sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \frac{H_1}{s+1} + \frac{H_2}{s+2}$$

$$H_2 = G(s) \cdot (s+2)\Big|_{s=-2} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \text{ allo stesso modo } H_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1} = e^{-2t} H_2 + e^{-t} \cdot H_1$$

$$R\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0, 1\right) = e^{-2(t_1 - t_0)} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} x^*_{\bar{R}} + e^{-(t_1 - t_0)} \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} x^*_{\bar{R}} + \eta$$

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \perp \mathrm{Im}(R(0))$$



metodo 1: $A = W^{-1} D W$ $\quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad W^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow W_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow W_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ -2e^{-t} & -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$