Sommario

Problema del controllo: caratterizzazione insiemi e stati raggiungibili e controllabili da uno stato generico ad un altro stato generico 3

Costruzione del controllo ad energia minima 11

Interpretazione del gramiano di raggiungibilità (Ellissoide di raggiungibilità) 17

Controllo in ciclo chiuso con retroazione dello stato 20

Stabilizzabilità 21

Allocazione dei poli con la Bass-Gura formula 25

Forma canonica di controllo 27

Regolazione dell'uscita e retroazione dello stato 32

Regolazione dell'uscita a un valore desiderato 34

Lemma di Heymann 48

Ricostruzione dello stato per sistemi TC e TD e gramiano di osservabilità 57

Tempo continuo 57

Tempo discreto 58

Stimatore asintotico dello stato di Luenberger 60

Tempo continuo 60

Tempo discreto 63

Detectabilità e Rivelabilità 64

Principio di separazione e Controllo ciclo chiuso con variabili stimate 67

Funzione di trasferimento e proprietà di sistemi controllati in retroazione con stato stimato 68

Controllo in ciclo chiuso con osservatore e allocazione poli 70

Stimatori di ordine ridotto 74

Introduzione al calcolo delle variazioni: funzionali e proprietà di linearità 80

Definizione punto estremo 87

Primo caso: $x(t_0)$ e $x(t_f)$ fissati, t_0 e t_f fissati 90

Secondo caso: $x(t_0)$, t_0 e t_f fissati, $x(t_f)$ libero 92

Terzo caso: $x(t_0)$, $x(t_f)$ e t_0 fissati, t_f libero 94

Quarto caso: $x(t_0)$ e t_0 fissati, $x(t_f)$ e t_f libero 95

Ottimizzazione vincolata 100

Moltiplicatori di Lagrange 101

Minimizzazione vincolata di un funzionale 103

Vincolo isoperimetrico 106

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

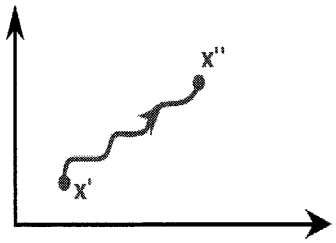
Problema di controllo ottimo lineare quadratico (LQ) **116**
Funzione Hamiltoniana ed Equazione differenziale di Riccati 116
Controllo ottimo dell'uscita ad un valore generico **127**
Inseguitore ottimo ad orizzonte finito **129**
Proprietà dell'equazione differenziale di Riccati (DRE) 130
Controllo ottimo ad orizzonte infinito con peso delle uscite **136**
Applicazione del controllo ottimo al caso SISO 137

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745



Problema del controllo: caratterizzazione insiemi e stati raggiungibili e controllabili da uno stato generico ad un altro stato generico

Consideriamo uno spazio di stati.
Il mio sistema nello stato x' voglio portarlo nello stato x''



devo trovare un ingresso da applicare al sistema che lo porti da x' a x''.

È irrilevante che x' e x'' siano stati di equilibrio, ci interessa solo che, dallo stato x' al tempo t_0, si arrivi allo stato x'' al tempo t_1.

Cosa accade prima di t_0 e dopo t_1 non ci interessa.
Non mettiamo vincoli sulla traiettoria per ora.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Questo problema è risolvibile?
Non è detto.

Possiamo dire che, se $x'' \in R(x', t_0, t_1)$, spazio di raggiungibilità, allora il problema ammette soluzione.

$R(x', t_0, t_1) \Rightarrow$ tutti gli stati raggiungibili partendo da x' dal tempo t_0 in un tempo $t_1 - t_0$.

Stessa condizione che si può verificare per vedere se il problema ammette soluzione è $x' \in C(x'', t_0, t_1)$.

$C(x'', t_0, t_1) \Rightarrow$ tutti gli stati dai quali posso partire al tempo t_0, che mi portano al tempo t_1 in x''.

Quello che non sappiamo, in generale, come sono fatti questi sottospazi R e C, che sono rispettivamente gli insiemi di raggiungibilità e di controllabilità.
Quello che sappiamo per certo essere un sottospazio è $R(0, t_0, t_1)$, è un sottospazio vettoriale; sappiamo anche che

$$R(0,t_0,t_1) = Im\left\{\int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)}\cdot B\cdot B^{\tau}\cdot e^{A^{tr}\cdot(t_1-\tau)}\cdot d\tau\right\} \qquad Gramiano\ di\ raggiungibilità$$

Sappiamo che se il sistema che stiamo considerando è tempo invariante, A(t) e B(t) sono matrici di costanti, e si può riscrivere come

$$R(0,t_0,t_1) = Im\left\{\int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)}\cdot B\cdot B^{\tau}\cdot e^{A^{tr}\cdot(t_1-\tau)}\cdot d\tau\right\} = Im\{[\,B\mid A\cdot B\mid A^2\cdot B\mid\ldots\mid A^{n-1}\cdot B]\} = R(0)$$

con n dimensione di A.
Se il rango di A è n, allora il sistema è completamente raggiungibile, se è minore di n, non sarà completamente raggiungibile.

Se il sistema dinamico è tempo invariante, allora R(0, t_0, t_1) = R(0) perchè qualunque siano t_0 e t_1, se è raggiungibile quel punto in un tempo t_1 - t_0, lo sarà in qualunque tempo t_2 - t_0.
Se non è raggiungibile non lo sarà in nessun tempo.

IL SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ È INDIPENDENTE DALL'INTERVALLO t_1 - t_0, SOTTO L'IPOTESI CHE IL SISTEMA SIA TEMPO INVARIANTE.

Per quanto riguarda la controllabilità:

$$C(0,t_0,t_1) = Im\left\{\int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_0-\tau)}\cdot B\cdot B^{\tau}\cdot e^{A^{t\tau}\cdot(t_0-\tau)}\cdot d\tau\right\} \qquad Gramiano\ di\ controllabilità$$

$$C(0,t_0,t_1) = Im\left\{\int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_0-\tau)}\cdot B\cdot B^{\tau}\cdot e^{A^{t\tau}\cdot(t_0-\tau)}\cdot d\tau\right\} = Im\{[B\mid A\cdot B\mid A^2\cdot B\mid\ldots\mid A^{n-1}\cdot B]\} = C(0) = R(0)$$

Quindi se uno stato è raggiungibile dall'origine con qualche intervallo di tempo, quello stato è anche controllabile all'origine in qualche intervallo di tempo qualsiasi.

Vediamo la struttura di R(x^*, t_0, t_1) e $C(x^*, t_0, t_1)$ con $x^* \neq 0$

Questi non sono definiti come si è fatto prima, ma possono esserlo sotto opportune ipotesi.

Teorema: se $x^* \in R(0) \equiv C(0)$, allora $R(x^*, t_0, t_1) = C(x^*, t_0, t_1) = R(0) = C(0)$. Se ciò non è vero allora $R(x^*, t_0, t_1)$ e $C(x^*, t_0, t_1)$ non sono spazi vettoriali

Dim: si impongono quattro condizioni

1) $R(0) \subseteq R(x^*, t_0, t_1)$
2) $R(0) \supseteq R(x^*, t_0, t_1)$
3) $R(0) \subseteq C(x^*, t_0, t_1)$
4) $R(0) \supseteq C(x^*, t_0, t_1)$

Se riesco a dimostrarle tutte vuol dire che sono gli stessi sottospazi.
Dimostriamole una alla volta, considerando un punto qualsiasi che appartiene a R(0), allora devo dimostrare che esso appartiene anche a $R(x^*, t_0, t_1)$ e $C(x^*, t_0, t_1)$ e viceversa.

a) $x' \neq x^*$, con $x' \in R(0)$

L'obiettivo è provare che $x' \in R(x^*, t_0, t_1)$.

$x' \in R(0)$ vuol dire che esiste un ingresso u' tale che

$$x' = e^{A\cdot(t_1-t_0)}\cdot x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)}\cdot B\cdot u'(\tau)\cdot d\tau$$

in questo caso x_0 è l'origine quindi

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$x' = \int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)} \cdot B \cdot u'(\tau) \cdot d\tau$$

Questo è vero per definizione di R(0).
Se $x^* \in R(0) \equiv C(0)$, vuol dire che posso costruire un ingresso u'' tale che

$$0 = e^{A\cdot(t_1-t_0)} \cdot x^* + \int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)} \cdot B \cdot u''(\tau) \cdot d\tau$$

Sfrutto l'ipotesi e la definizione di raggiungibilità.

$x' \in R(0) \Rightarrow$ è raggiungibile dall'origine;
$x^* \in C(0) \Rightarrow$ posso partire da x^* e arrivare nell'origine;

abbiamo costruito in pratica due ingressi u' e u'':
u' ⇒ porta dall'origine a x';
u'' ⇒ porta da x^* all'origine;
ossia un percorso in due passi.

$$(x^* \Rightarrow 0) + (0 \Rightarrow x') \qquad \text{quindi} \qquad x^* \Rightarrow x'$$

quindi $x' \in R(x^*, t_0, t_1)$ se prendo u = u' + u'', dove

$$x' = e^{A\cdot(t_1-t_0)} \cdot x^* + \int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)} \cdot B \cdot (u' + u'') \cdot d\tau$$

[C.V.D.]

b) $x' \in R(x^*, t_0, t_1)$

quindi esiste un ingresso u tale che

$$x' \stackrel{\text{def}}{=} e^{A\cdot(t_1-t_0)} \cdot x^* + \int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

Questa espressione è composta da due parti:

$$e^{A\cdot(t_1-t_0)} \cdot x^* \qquad\qquad \int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

È evidente che l'integrale appartiene a C(0).
Perché? Perché so che se $x \in C(0)$, allora

$$x = e^{A\cdot(t_1-t_0)} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau = \int_{t_0}^{t_1} e^{A\cdot(t_1-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745
MASTER COPY Tel. 050 8312126 Cell. 388 9837745