Raccolta di materiale utile per lo scritto di Analisi II (quindi niente dimostrazioni) basata sul corso del 2020-2021 e su quello del 2022-2023.

Argomenti:

▷ Analisi II
- limiti di successioni
- limiti di funzioni
- limiti direzionali di funzioni
- continuità
- differenziale

▷ Massimi e minimi
- teorema di Weierstrass
- teorema di Weierstrass generalizzato
- Studio del bordo (parametrizzazione e Lagrange)
- Matrice Hessiana

▷ Altro
- Funzioni a valori vettoriali
- Funzioni composte
- Seno e coseno iperbolico

▷ Integrali
- volumi di solidi
- lunghezza di curve
- aree di superfici e perimetri di solidi

▷ Approfondimenti
- volumi per fette orizzontali
- come risolvere $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$
- sviluppi di Taylor
- Calcolo integrali: cambio variabili
- come risolvere $\int \sqrt{4x^2+1}\cdot x\,dx$
- Coordinate sferiche

▷ Esercizi

ANALISI II

in $\mathbb{R}^n$ sappiamo fare:

- SOMMA
- PRODOTTO PER SCALARE
- MODULO O DISTANZA $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}^n$

  ↳ NON DIPENDE DAGLI ASSI SCELTI
- FUNZIONI $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad x \in \mathbb{R}^n$ e $f(x) \in \mathbb{R}$
- SUCCESSIONI $\{x^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ dove $x^j \in \mathbb{R}^n$, $\quad x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$

  ↑ leggere x^j nel posto j

OSS: x_1^j è una successione in $\mathbb{R}$ $\quad (x_1^1, x_1^2, x_1^3 \dots)$

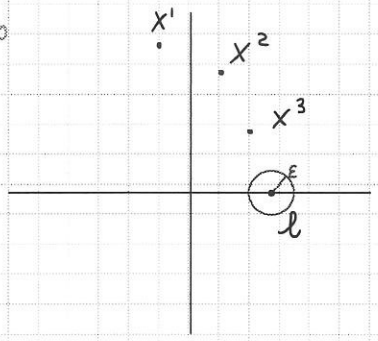
quindi $\{x^j\}_j$ si può vedere come n successioni in $\mathbb{R}$

LIMITI DI SUCCESSIONI

Def 1: $x^j \to l \in \mathbb{R}^n$ se $\forall k = 1 \dots n \quad x_k^j \to l_k$

Def 2: $x^j \to l \in \mathbb{R}^n$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\quad \exists \bar{J} : \forall j > \bar{J} \quad |x^j - l| < \varepsilon$
$\varepsilon \in \mathbb{R}$

per esempio in $\mathbb{R}^2$



Da $j = \bar{J}$ in poi x^j sono tutti dentro il cerchio di raggio ε

OSS: queste due definizioni non dipendono dalla scelta degli assi.

LIMITI DI FUNZIONI

Def 1: Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se per ogni successione $\{x^j\} \subseteq \mathbb{R}^n$ con $x^j \to \bar{x}$ si ha $f(x^j) \xrightarrow{j \to +\infty} l$



Def 2: Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

si dice $f(x) \xrightarrow{x \to \bar{x}} l$ se per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x$: $|x - \bar{x}| < \delta$ si ha $|f(x) - l| < \varepsilon$

LIMITI DIREZIONALI DI FUNZIONI

"viaggio su una retta" avvicinandomi a $\bar{x}$ = è come fare limiti in $\mathbb{R}$

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, e sia v una direzione, cioè un vettore di $\mathbb{R}^n$.

Il limite direzionale di **f in $\bar{x}$ nella direzione v** è, se esiste

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(\bar{x} + \varepsilon v)$$

Se $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$, allora per ogni direzione v,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(\bar{x} + \varepsilon v) = l$$

$\sim$

Il limite direzionale di **f all'infinito in direzione v** è, se esiste

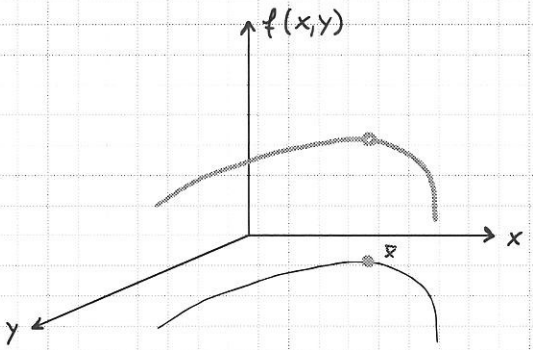
$$\lim_{\varepsilon \to \infty} f(\varepsilon v)$$

Il limite esiste $\Rightarrow$ tutti i limiti direzionali esistono e sono uguali

Il limite esiste $\overset{\text{FALSO}}{\Leftarrow}$ tutti i limiti direzionali esistono e sono uguali

Alcuni limiti direzionali non esistono e/o non sono tutti uguali $\Rightarrow$ il limite non esiste

esempio



funzione che vale sempre zero, tranne nei punti corrispondenti alla parabola (escluso $\bar{x}$) in cui vale 1

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) \neq 0$$

però $\forall v \quad \lim_{\varepsilon \to 0} f(\bar{x} + \varepsilon v) = 0$

~

A cosa servono i limiti direzionali?

1) Possono dirmi che il limite non esiste
2) Possono dirmi l'unico limite possibile

Sono utili perché sono limiti su $\mathbb{R}$

~

Non ha senso in $\mathbb{R}^n$ fare $x \to +\infty$, perché non abbiamo un'unica direzione come in $\mathbb{R}$.

Ha invece senso fare $|x| \to +\infty$

Def: $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = l$ se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : |x| > M$

allora $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\sim$

È utile a volte usare le coordinate polari in $\mathbb{R}^2$:

c. polari $\longrightarrow$ c. cartesiane

(ρ, θ) $\qquad$ $(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$

c. cartesiane $\longrightarrow$ c. polari

(x_1, x_2) $\qquad$ $\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \arctan \frac{x_2}{x_1}\right)$

$\hookrightarrow x_1 \neq 0$

Esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho} = 0$