Studio di funzioni $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2 \dots x_n) : x_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n\}$
- $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale

  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ notazione vettoriale

  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ... notazione con componenti

- prodotto scalare canonico

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

- norma di un vettore (lunghezza)

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} x^2 \right)^{1/2}}_{\text{polinomio in } n \text{ variabili}}$$

- distanza tra x e y in $\mathbb{R}^n$

$$dist(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)}$$

- topologia (intorni, aperti, chiusi)

$$B_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : dist(x, x_0) < r \}$$ APERTA

centro, raggio

$$\bar{B}_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : dist(x, x_0) \leq r \}$$ CHIUSO

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che

1) $x_0 \in Int(A)$ se $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq A$
2) $x_0 \in Clos(A)$ se $\forall r > 0$ vale $B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset$
3) $x_0 \in D(A)$ se $\forall r > 0$ vale $(B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

punto di accumulazione

CHIUSURA DI UN INSIEME

def. Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ definiamo la chiusura di E come il più piccolo insieme chiuso $\bar{E} \subseteq R$ che contiene E

$$\bar{E} = \{ p \in R^N : \forall \varepsilon > 0, \{ Q : |P-Q| < \varepsilon \} \cap A \neq \emptyset \}$$

esempio. $A = R^3 \setminus \{(1,2,3\}$

$\bar{A} = R^3$

esempio. $A = R^2 \setminus \{ x \cdot y = 0 \}$ (insieme degli assi cartesiani)

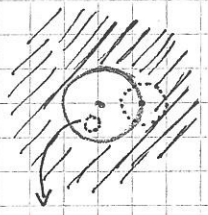
$\bar{A} = \mathbb{R}^2$



nella chiusura prendo assenti di A

esempio. $A = R^3 \setminus \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \} = \{ x^2 + y^2 + z^2 > 1 \}$

$\bar{A} = \{ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \}$



A

per ci non sta nella chiusura ma nemmeno in A.

Master COPY COPISTERIA

Definizioni di limiti in 2 variabili

def. Sia f definita in $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}$ e (x_0, y_0) punto di accumulazione. Dico che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau > 0$ (raggio) tale che se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $|(x,y) - (x_0,y_0)| < \tau$ (cioè se (x,y) appartiene all'intorno buco di (x_0,y_0) di raggio τ)

$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

master COPY COPISTERIA

def. Sia f definita in $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) punto di accum. di Ω. È sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ (chiuso) allora che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau > 0$ tale che $\{(x,y): |(x,y) - (x_0,y_0)| < \tau\} \cap \Omega \neq \emptyset$

allora

$$|f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

L'INTORNO SFERICO di x_0 è un insieme del tipo

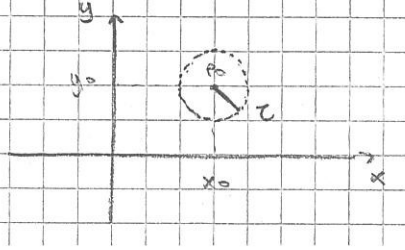
$$U_\tau(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \tau\}$$

raggio dell'intorno $\tau > 0$

Si chiama intorno circolare di un punto $P_0(x_0, y_0)$ del piano l'insieme dei punti del piano le cui coordinate (x,y) soddisfano

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \tau^2$$

con $\tau > 0$ detto raggio dell'intorno e P_0 centro dell'intorno



def. Sia $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^2$.
Dato $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{A}$, si dice che

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = \pm\infty$$

se $\forall M$ esiste $r > 0$ tale che
$\forall (x,y) \in A \cap \{|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})| < r\}$ si ha

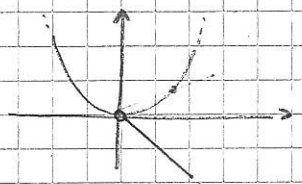
$$f(x,y) \gtrless M$$

def. Dato $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e dato un elemento $v \in \mathbb{R}^3$
si dice evidente determinare il $\lim$ $f(0,0,0)$ se
esiste

$$\lim_{t\to 0} f(tv)$$

perché dobbiamo vedere, che es.
$f: D \to \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}^3$ $\lim_{t\to 0} f(tv)$
con $(tv) \in D$.

es. $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$
(numero che def. se possibile)



$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2 \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

osservazione:

se il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = e \qquad (x,y) \in D$
allora per ogni direzione per cui ho senso fare
il limite direzionale di f in $(0,0)$, tale limite
è e.

osservazione:

Se $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $n > 1$, limiti direzionali
servono moltissimo.

es. sia $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$
definita da $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

$v = (v_1, v_2)$ esiste il limite direzionale
lungo la semiretta $t \to tv$ $t > 0$

$$\lim_{t\to 0^+} f(tv_1, tv_2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} = 0$$

ma $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ non esiste

es. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ NE

costruisco su $f(x,y)$ ad es. tutto $y=x$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

perché $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$

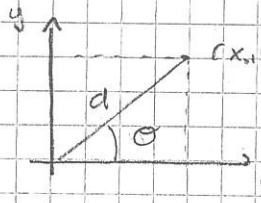
invece ho costruito di $f(x,y)$ ad es. tutto $y=-x$

$$f(x,-x) = \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

perché tutto a $-\frac{1}{2}$

quindi il limite non esiste.

FUNZIONI RADIALI per provare l'esistenza del limite 7/03



$x = d\cos\theta$
$y = d\sin\theta$
$d = \sqrt{x^2+y^2}$

es. $f = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{d^2\cos\theta\sin\theta}{d^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \cos\theta\sin\theta$

$f = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

$f = \frac{x^2+y^2}{x^2y} = \frac{d^2}{d^3\cos^2\theta\sin\theta} = \frac{1}{d\cos^2\theta\sin\theta}$ / il limite non esiste perché dipende da θ

es. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$

riscrivo la funzione in coordinate polari

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \frac{2d^3\cos^2\theta\sin\theta}{d^2} = 2d\cos^2\theta\sin\theta$$

poiché $|\cos\theta|$ e $|\sin\theta| \le 1$ si può

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| = 2d\,|\cos^2\theta\sin\theta| \le 2d$$

trucco del teorema: se $|f(x,y)|\to 0$ allora $f(x,y)\to 0$

dunque $0 \le |f(x,y)| \le 2d$ se $d \to 0$ allora $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$