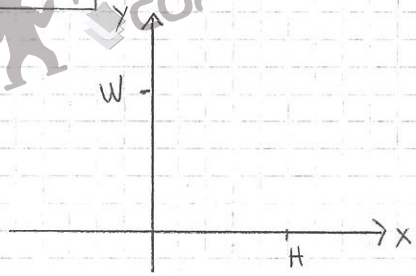
LIMITI

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $\ell \in \mathbb{R}$ → si dice che f tende ad ℓ per x che tende all'infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \quad \text{se} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists H > 0 \text{ t.c. } \forall x > H, \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

→ Si dice che f tende all'infinito

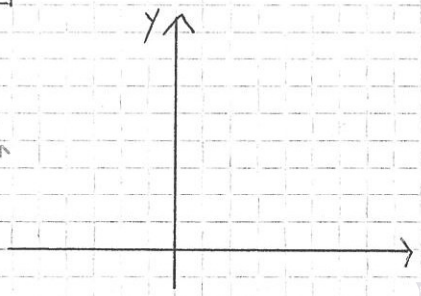
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{se} \quad \forall W > 0 \ \exists H > 0 \text{ t.c. } \forall x > 0 \quad f(x) > W$$



Sia $f(a, +\infty) \to \mathbb{R}$

→ Si dice che f tende ad $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende ad a da destra,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \quad \text{se} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, a+\delta)$$



→ Si dice che f tende all'infinito

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \text{se} \quad \forall W > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in (a, a+\delta) \quad f(x) > W$$

Esempio

① $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\quad \forall W>0 \ \exists H : \forall x>H \quad x>W$

per ogni W, scelgo $H=W \rightsquigarrow$ dimostrazione

② $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\quad$ Definizione $\forall W>0 \ \exists H : \forall x>H \quad x^2>W$

Dimostrazione:

↳ per ogni W, scelgo $H=\sqrt{W}$ → se $x>H$ allora $x^2>H^2=W$

PROPRIETÀ DEI LIMITI

› Se $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ①

se ↓

$\exists M : \forall x>M \quad f(x) \geq g(x)$ [se $f(x) \geq g(x)$ da un certo punto in poi]

› Se $f \geq g$ e $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) \geq \ell$ se g ha un limite ②

es. $g(x) = -5$ $\quad f(x) = \sin x$ $\quad \sin x$ è sempre > -5 ma $\sin x$ non ha un limite

DIMOSTRAZIONE 1

Devo dimostrare che $\forall W>0 \ \exists H : \forall x>H \ f(x)>W$, sia W assegnato *

↳ dato che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ allora esiste un H : se $x>H$ allora $g(x)>W$

Con lo stesso H so che $\forall x>H$, $f(x) \geq g(x)$ e quindi $f(x)>W$

› Se $f(x)$ è maggiore di $g(x)$ da un certo punto in poi

↳ se $\exists M : \forall x>M \quad f(x) \geq g(x)$ la dimostrazione è la stessa fino a *

- Dato che $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ allora esiste un H_g: se $x>H_g$ allora $g(x)>W$.
- Sia H il massimo tra $\{H_g$ e $M\}$. Allora $\forall x>H$, $f(x) \geq g(x)$ e quindi $f(x)>W$

Esempio ①

$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ perché x^3 è maggiore di x anche se da un certo punto in poi

PROPRIETÀ DEI LIMITI

$\lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty \rightarrow \forall a > 0$

parte intera di $\frac{1}{a}$ ovvero $\frac{1}{a}$ privato delle cifre dopo la virgola

> Se $a \geq 1$ e $x > 1$, $x^a \geq x$ ↷ $x^{a-1} \geq 1$

$a > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{a}$ basta porre $n = 1 + \left[\frac{1}{a}\right]$

> Sia $a > 0$ → Se trovo un $n \in \mathbb{N}$ / $a > \frac{1}{n}$, allora $\forall x > 1$, $x^a \geq x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^{1/2} = +\infty$ Sia $W > 0$ definisco $H = W^2$ Allora $\forall x > H$ $x^{1/2} > H^{1/2} = (W^2)^{1/2} = W$

$x^{1/2} > H^{1/2}$ perché $x^{1/2}$ è l'inverso di x^2 che è funzione crescente
↳ anche $x^{1/2}$ è crescente

$\lim_{x \to +\infty} x^{1/n} = +\infty$ Sia $W > 0$ definisco $H = W^n$
Allora $\forall x > H$ $x^{1/n} > H^{1/n} = (W^n)^{1/n} = W$ con $n \in \mathbb{N}$

CON a NEGATIVO

Se $a < 0$ → $\lim_{x \to +\infty} x^a = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $a = -1$

Devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K > 0$ con la proprietà che $\forall x > K$, $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. Sia $\varepsilon > 0$ definisco $K = \frac{1}{\varepsilon}$. Allora $\forall x > K$, $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$ ($\uparrow$ ovvia se $\forall x > 0$) $\qquad \frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$

Ogni volta che $f(x)$ tende a $+\infty$ → $f^{-1}(x)$ tende a 0

> Sia $f(x)$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ → Allora $\lim_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = 0$ $\qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$

Sia $\varepsilon > 0$, definisco $W = \frac{1}{\varepsilon}$ esiste $K > 0$ tale che $\forall x > K$, $f(x) > \frac{1}{\varepsilon} = W$
Allora $\forall x > K$ $-\varepsilon < 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$

Se $a < 0$
↳ $x^a = \frac{1}{x^{-a}}$

ALTRE PROPRIETÀ

→ $\lim_{x\to 0^+} x^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(\frac{1}{x})^2}$ Se chiamo $y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$

$\lim_{x\to 0^+} x^2 = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^2} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} x^a = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^a} = \begin{cases} +\infty & \forall a>0 \\ 0 & \forall a<0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ se $a>0$ $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0$

se $a<0$ $\lim_{x\to 0^+} x^a = +\infty$

*Dimostro che sia $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $f(x)>0$ $\forall x > M$ Allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Sia $W>0$ definisco $\varepsilon = \frac{1}{W}$, sia che $\exists$ K : $\forall x >$ massimo $\{M, K\}$, $0 < f(x) < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon} = W$

ALTRI LIMITI CON POTENZE

$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ $\quad 2^1>1 \quad 2^2>2 \quad 2^3>3 \quad 2^4>4$

$2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ se è vero per n, allora $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n > n+1$

$2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2^x → sia $x>0$, $x\in\mathbb{R}$, siccome l'esponenziale è crescente $2^x \geq 2^{[x]}$ (parte intera di $x \in \mathbb{N}$) $> [x] > x-1$

So che x va all'infinito quindi anche $x-1$ va all'infinito

$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{2})^x = \lim_{x\to+\infty} 2^{x/2} = +\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$ $\quad 3^x \geq 2^x$

DOMANDA → Data $a>1$, esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $a^n > 2$? Sì

Se sì, allora $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} (a^n)^{x/n} = +\infty$

*Scriviamo $a = 1+\eta$ $\quad (1+\eta)^n \geq 1+n\eta$

$(1+\eta)^{n+1} = (1+\eta)^n \cdot (1+\eta) \geq (1+n\eta)(1+\eta) = 1+n\eta+\eta+n\eta^2 \geq 1+(n+1)\eta$

$(1+\eta)^n \geq 1+n\eta$ VERA SEMPRE

* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty}$ e $\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = 0}$ → per $a>1$

se $a<1$ → $\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} = 0}$ e $\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = +\infty}$ → a^y è strettamente positivo

$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ = NON ESISTE

○ Non è vero che $\exists$ limite $\to \forall \varepsilon$ (errore) $\exists H / \forall x > H \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Sia $\ell \in \mathbb{R}$. Definisco $\varepsilon = 1/3$, sia $H \in \mathbb{R}$

Esistono $x_1 > H$, $x_2 > H$ tale che $\operatorname{sen}(x_1) = 0$, $\operatorname{sen}(x_2) = 1$ — 0 e 1 non possono distare da ℓ meno di $1/3$

$|\operatorname{sen}(x_1) - \ell| + |\operatorname{sen}(x_2) - \ell| = |\ell| + |1 - \ell| \geq |1 - \ell + \ell| = 1$ → DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

la loro somma è > 1

$\Rightarrow$ almeno uno dei due è $> 1/3$

○ $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$

$-\varepsilon < \operatorname{sen} x < \varepsilon$ (vero perché positivo $[0^+]$?)

Sia $\varepsilon > 0$ definisco $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$ tale che $\forall\ 0 < x < \delta$, $\operatorname{sen} x > 0$ perché $x > 0$ e $\operatorname{sen} x < x < \delta = \varepsilon$

$\forall\ 0 < x < \pi/2$
$\operatorname{sen} x < x < \tan x$

$\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x$

Sia $\varepsilon > 0$ definisco $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$ tale che $\forall\ 0 < x < \delta$, $\cos x > 0$, $\cos x \leq 1$ So che $-\varepsilon < \operatorname{sen} x < \varepsilon \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x < \varepsilon^2$

$\cos^2 x < -\varepsilon^2 + 1$

$\cos x < (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$ vale se $\varepsilon < 1$

○ Se $\varepsilon < 1$

$\cos x \geq (1-\varepsilon^2)^{1/2} \geq 1 - \varepsilon$ (vero?)

$(1-\varepsilon^2)^{1/2} \geq 1 - \varepsilon \iff 1 - \varepsilon^2 \geq 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2$

$\Updownarrow$

$2\varepsilon^2 \leq 2\varepsilon$ $\quad \varepsilon \leq 1$

Se $\varepsilon > 1$

$1 - \varepsilon < \cos x < 1 + \varepsilon$

$\cos x > 1 - \varepsilon$ vero perché $1 - \varepsilon < 0$ e $\cos x > 0$

$\cos x < 1 + \varepsilon$ vero perché $1 + \varepsilon > 1$ e $\cos x < 1$

Quindi $\forall\ 0 < x < \delta$, $1 - \varepsilon < \cos x < 1 + \varepsilon$

○ $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\operatorname{sen} x < x < \tan x \quad \forall\ 0 < x < \pi/2$

$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{x} > \cos x$

Sia $\varepsilon > 0$ definisco $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$ · so che $0 < x < \delta$ $\cos x > 1 - \varepsilon$ $\forall\ 0 < x < \delta$

$1 - \varepsilon < \cos x < \frac{\tan x}{x}$ $\cos x = \operatorname{sen} x / x < 1 + \varepsilon$