ANALISI II

lezione 01/03/2021

SERIE NUMERICHE

serie: tipo particolare limite

↳ voglio fare somma infiniti termini

$x_1, x_2, x_3, \dots$ successione numeri (in $\mathbb{R}$)

$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N$

↳ simbolo sommatoria

"serie" è il tentativo di fare una somma infinita $\rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} x_i$

↓

somma infiniti numeri

si utilizzano i limiti

Definiamo $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ e allora la definizione è

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

Essendo un limite però $\begin{cases} \text{esiste in } \mathbb{R} \\ \text{esiste e fa } \pm\infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$

Ci sono in ballo due successioni $\{x_n\}$ successione originale

$\{S_n\}$ successione delle somme parziali

Se ho una successione $\{y_n\}$ posso vederla come serie associata a $y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, y_4 - y_3 \dots$ (se faccio somma viene serie associata)

serie è successione somme parziali

successione la posso vedere come serie

↳ posso passare da una a altra


master
COPY


master
COPY


master
COPY


master
COPY

In molte situazioni, le serie appaiono in modo naturale

Due classi: SERIE
- A TERMINI POSITIVI (ossia $x_i \geq 0$)
- A TERMINI GENERICI

esempi:

- $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$
  ↓ serie converge a 2

basta osservare che $S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$

$S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = = 2 - \frac{1}{4}$

$\lim_{n\to+\infty} 2 - \frac{1}{2^n} = 2$

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\frac{42+35+30}{210} = \frac{107}{210}} + \dots$

in generale $\frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} = \frac{3n^2 + 3n + 9n^2 - 1 + 3n^2 - 3n}{3n(9n^2-1)} = \frac{27n^2 - 1}{3n(9n^2-1)} \overset{?}{>} \frac{1}{n}$ ↓ voglio confrontarlo con $\frac{1}{n}$ $\quad \Leftrightarrow \quad 27n^2 - 1 > 27n^2 - 3$ vero!

tornando alla serie

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots > \underset{\text{cambia solo per questo}}{=} 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$

↳ è falso → non può convergere a un numero reale => dato che sono tutti positivi va a $+\infty$

Deduciamo che $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

osservazione: se una serie è a termini positivi, allora necessariamente converge (ha un limite reale) oppure diverge a $+\infty$.

↳ Infatti una serie è a termini positivi $\Leftrightarrow$ la successione delle somme parziali è crescente (successioni crescenti o convergono o divergono a $+\infty$)

Domande per serie: converge o diverge?

↳ non si chiede a quanto (difficile sovente S_n a occhio nudo)

Successioni a termini positivi

Tra le serie a termini >0, che possiamo dire?

$\sum \frac{1}{n} = +\infty$ (diverge)

$\sum \frac{1}{2^n}$ = converge (a 2)

$\sum n = +\infty$

master copy

osservazione: Se una serie converge, allora $x_n \to 0$ (somma termini sempre più piccoli)
dove tendere a 0

↓

DIM: Se $\sum x_n = \ell$, allora $S_n \to \ell$

Allora $\forall \varepsilon \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}, |S_n - \ell| < \varepsilon$

Ma allora $\forall n > \bar{n}, |x_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| = |(S_{n+1} - \ell) - (S_n - \ell)| \leq |S_{n+1} - \ell| + |S_n - \ell| < 2\varepsilon$ (disuguaglianza triangolare)

$\Downarrow$
$x_n \to 0$ (per definizione)

$\Rightarrow$ se la successione non tende a 0, allora non converge (se è a termini positivi, allora diverge)

Il viceversa è falso! → es: $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ ma $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

termine n-esimo di solito $\to 0$ ma non mi dice nulla!

- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} \dots$

confronto con serie $\frac{1}{2^n} = \sum \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$

ha termini più grandi questa

$(2^n \to +\infty$ più velocemente $n^2)$

ma poi non più → confronto non funziona

Teorema del confronto

Se ho una successione $x_n \leq y_n$ e $\sum x_n = +\infty$, allora $\sum y_n = +\infty$

D'altra parte, se $\sum y_n$ converge e $x_n \geq 0$; allora $\sum x_n$ converge
↳ perché non può divergere ed è a termini positivi

master copy

DIM: Se $x_n \leq y_n$, allora $S_n \leq \sigma_n$ dove $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ e $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$

Allora se $S_n \to +\infty$, $\sigma_n \to +\infty$ per teo confronto limiti

Se invece $x_n \leq y_n$ e y_n diverge non posso dire nulla

e x_n converge // //

* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\alpha = 0$ $\sum = +\infty$ (somma infiniti di 1)
- $\alpha = 1$ $\sum = +\infty$ (prima)
- $\alpha = 2$??

$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^\beta} \iff n^\beta \geq n^\alpha \iff \beta \geq \alpha$ ⟶ se $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, allora anche $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge
se $\sum \frac{1}{n^\beta}$ diverge, allora anche $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge

se $\alpha = 1$ mi diverge $\Rightarrow$ $\forall \alpha \leq 1$ $\sum = +\infty$ diverge

se $\alpha = 2$ converge → converge $\forall \alpha > 2$
" diverge → diverge $\forall 1 < \alpha < 2$

$\sum \frac{1}{2^n} = 2$ (serie geometrica)

Provo a studiare

$\sum a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$

se $|a| \geq 1$ di sicuro la serie non converge perché $a^n \not\to 0$

- $a \geq 1$, $\sum a^n = +\infty$ Serie positivi che non converge $\Rightarrow$ diverge
- $a \leq -1$, $\sum a^n =$ non converge e non diverge

se $a = -2$ $\underbrace{1}_{<0} \underbrace{-2}_{<0} \underbrace{+4}_{\text{somma parziale}} \underbrace{-8}_{<0} +16$ → $-\infty$ / → $+\infty$

S_n (n pari) → $+\infty$
S_n (n dispari) → $-\infty$

$\Rightarrow \sum$ non converge e non diverge ⇓ $\forall a < -1$

└ $a = -1$ limitata

$a < -1$ oscilla come un pazzo tra $+\infty$ e $-\infty$

- $-1 < a < 1$, $\underbrace{1 + a + a^2 + \dots + a^n}_{S_n} = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1}{1 - a}$

RIASSUNTO

Serie esponenziali → converge se $-1 < a < 1$ (converge a $\frac{1}{1-a}$)
→ altrimenti o diverge o oscilla come pazzo