ARGOMENTI DEL CORSO

- ▷ somme, prodotti per scalare su $\mathbb{R}^n$
- ▷ limiti su $\mathbb{R}^n$
- ▷ continuità e differenziabilità su $\mathbb{R}^n$
- ▷ integrali

LIMITI SU $\mathbb{R}^n$

Definita la <u>distanza</u> o <u>norma</u> tra due punti in $\mathbb{R}^n$ come

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

Diciamo che:

1) $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, sia $(\bar{x},\bar{y})$ t.c. $\forall \eta > 0$ $\left[\{(x,y) : |(x,y)-(\bar{x},\bar{y})| < \eta\} \cap A \neq \emptyset\right]$, allora

A include i cerchietti sufficientemente vicini a $(\bar{x},\bar{y})$ ⇓ $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{A}$

$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists r > 0 : \forall (x,y) \in A$, $|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})| < r \Rightarrow |f(x,y)-\ell| < \varepsilon$.

<u>CHIUSURA</u> DI <u>A</u>: insieme di tutti i punti che hanno distanza nulla da A. Si indica con $\bar{A}$.

LIMITI A $\pm\infty$

1) $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{A}$

$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = +\infty$ se $\forall K$ $\exists r > 0$ t.c. $\forall (x,y) \in A \cap \{|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})| < r\}$ si ha $f(x,y) > K$.

2) $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{A}$

$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = -\infty$ se $\forall K$ $\exists r > 0$ t.c. $\forall (x,y) \in A \cap \{|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})| < r\}$ si ha $f(x,y) > K$.

master COPY
master COPY
master COPY COPISTERIA

LIMITI DIREZIONALI

Data $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e dato un elemento $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$, diciamo limite direzionale di f in un punto (a,a,a) il limite di $f(tv)$ con $t \to 0$ perché abbia senso, cioè perché ci siano degli t sufficientemente piccoli tali per cui tv sta nel dominio.

→ I limiti direzionali ci dicono se un limite non esiste o ci danno possibili valori qualora esistesse. Non possono dirci se esiste.

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO

Se $|f(x)| \to 0$ da qualche parte, allora $f(x) \to 0$ dalla stessa parte.

LIMITI ALL'INFINITO

Stiamo mandando la norma del vettore all'infinito.

1) $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \text{ t.c. } |(x,y)| < R$

$\Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

2) $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = +\infty \Rightarrow \forall M \ \exists R > 0 : |(x,y)| > R$

$\Rightarrow f(x,y) > M$

LIMITI DIREZIONALI A $+\infty$

Scegliamo un vettore direzione $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ e studiamo il limite $\lim_{t \to +\infty} f(tv)$.

$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = \ell \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ si ha $\lim_{t \to +\infty} f(tv) = \ell$

Dim. Prendiamo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Vogliamo dimostrare che, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{t} > 0 : \forall t > \bar{t}$, $|f(tv) - e| < \varepsilon$.

Dato $\varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ t.c. se $|x| > R \Rightarrow |f(x) - e| < \varepsilon$ (+evi).

Sappiamo che se $|tv| > R$, allora $|f(tv) - e| < \varepsilon$. Osserviamo che $|tv| = |t| \cdot |v|$, $|tv| > R$ se $|t| \cdot |v| > R \iff |t| > \frac{R}{|v|} = \bar{t}$. Per questo $\bar{t}$, l'enunciato è verificato. □

CONTINUITÀ

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in D$. Allora f si dice continua in $\bar{x}$ se $\forall \varepsilon \exists \delta : |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$;

alternativamente, $\lim_{x \in D \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$.

Somma di funzioni continue: $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue.

Fissiamo un certo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo dimostrare che $f+g$ è continua in $\bar{x}$. Prendiamo $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1, \delta_2 :$ se $|x - \bar{x}| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$ e se $|x - \bar{x}| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Definiamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Se $|x - \bar{x}| < \delta$, allora $|(f+g)(x) - (f+g)(\bar{x})| =$

$= |(f(x) + g(x)) - (f(\bar{x}) + g(\bar{x}))| \leq |f(x) - f(\bar{x})| + |g(x) - g(\bar{x})| < \varepsilon$ □

Prodotto di funzioni continue: $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Prendiamo $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1, \delta_2 :$ se $|x - \bar{x}| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2(|g(\bar{x})| + 1)}$ e se $|x - \bar{x}| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2(|f(\bar{x})| + 1)}$. Definisco $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $|x - \bar{x}| < \delta$, allora $|f(x) \cdot g(x) - f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})| \leq \frac{\varepsilon |f(x)|}{2(|f(\bar{x})| + 1)} + \frac{\varepsilon}{2}$

$< \varepsilon$ □

Componenti: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_i$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

$\varepsilon > 0$. Sia $\delta = \varepsilon$. Vogliamo verificare che $|x - \bar{x}| < \delta = \varepsilon$

$\Rightarrow |x_i - \bar{x}_i| < \varepsilon$. Ciò è equivalente a verificare

che $(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_n - \bar{x}_n)^2 < \varepsilon^2$

$\Rightarrow (x_i - \bar{x}_i)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow f(x)$ è continua. □

Composizione di funzioni:

$\begin{cases} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$ continue

$g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Fissiamo $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$. Vogliamo

un $\delta > 0$: $|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(\bar{x}))| < \varepsilon$.

$\exists \alpha > 0$: se $|t - f(\bar{x})| < \alpha \Rightarrow |g(t) - g(f(\bar{x}))| < \varepsilon$ ← continuità di g.

continuità di f → $\exists \delta > 0$: se $|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \alpha$. □

CHIUSURA DI UN INSIEME

Diciamo che $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso se coincide con la sua chiusura.

$\bar{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0,\ B(x, r) \cap E \neq \emptyset\} \supseteq E$.

↳ ball di centro x e raggio r

E è chiuso $\Leftrightarrow$ ogni successione in E che converge ha limite in E

Dim.

$\Rightarrow$) sia $\{x_n\}$ una successione in E tale che $x_n \to \bar{x}$.

Dimostriamo che $\bar{x} \in \bar{E}$. Sia $r > 0$ sappiamo che $|x_n - \bar{x}| \to 0$.

Allora $\forall r\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$, $|x_n - \bar{x}| < r$, cioè $x_n \in B(\bar{x}, r) \cap E$.

$\Leftarrow$) Se E non è chiuso, allora $\exists \bar{x} \in \bar{E} \setminus E$ $\forall r > 0$,

$B(\bar{x}, r) \cap E \neq 0$. cioè, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n}) \cap E$, ma

$x_n \to \bar{x}$ □

APERTURA DI UN INSIEME

Diciamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è chiuso.

A è aperto $\iff \forall x \in A \ \exists r : B(x,r) \subseteq A$.

$\Rightarrow$) Suppongo che $x \in A$ e $\forall r > 0$, $B(x,r) \setminus A \neq \emptyset$. $\exists \{x_n\}$ successione: $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ con $|x_n - x| < \frac{1}{n}$, quindi $x_n \to x$. $\mathbb{R}^n \setminus A$ non è chiuso, quindi A non è aperto. → contronominali

$\Leftarrow$) Suppongo che $\forall x \in A \ \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq A$. Devo dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus A$ è chiuso. Sia $\{x_n\}$ successione, $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ con $x_n \to x$. Se x stesse in A, esisterebbe $r > 0 : B(x,r) \subseteq A$. Allora $\forall r$, $x_n \notin B(x,r)$, cioè $|x_n - x| > r$. Ma ciò è assurdo per quanto detto prima.

□

f è continua in $x \in D \iff \forall x_n \in D : x_n \to x$, allora $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$

MASSIMI e MINIMI

Data $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ limitata, $\exists$ una sua sottosuccessione che converge. Data $f : D \to \mathbb{R}$, posso prendere $\{x_n\} \subseteq D$ massimizzante, ovvero tale che $x_n \to \sup f$.

TEOREMA: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, f continua con D chiuso e limitato (↓ compatto), $\exists$ pt. di massimo e un punto di minimo — WEIERSTRASS

TEO. (WEIERSTRASS GENERALIZZATO): $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $\exists x : f(x) < \ell$, allora $\exists$ pt. minimo globale