# LIMITI

- $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} F(\vec{x}) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ t.c. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta \Rightarrow |F(\vec{x}) - \ell| < \varepsilon$
- $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} F(\vec{x}) = \pm\infty \iff \forall K \ \exists r > 0$ t.c. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in A \cap \{|\vec{x} - \vec{x}_0| < r\}, \ F(\vec{x}) \gtrless K$
- Sia $F: A \to \mathbb{R}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ una direzione di $F$. Limite direzionale di $F$ in $\vec{v}$ è: $\lim_{t\to 0} F(v(t))$
- Per mostrare che $F(x,y) \to L$ per $(x,y) \to (x_0,y_0)$ basta scrivere una maggiorazione del tipo
  $|F(\rho,\theta) - L| \le g(\rho)$ , $g(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0$
- $\lim_{|\vec{x}|\to+\infty} F(\vec{x}) = L \iff \forall \varepsilon \ \exists R$ t.c. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ |\vec{x}| > R \Rightarrow |F(\vec{x}) - L| < \varepsilon$
- $\lim_{|\vec{x}|\to+\infty} = \pm\infty \iff \forall M \ \exists R$ t.c. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ |\vec{x}| > R \Rightarrow F(\vec{x}) \gtrless M$
- $\lim_{|\vec{x}|\to\infty} F(\vec{x}) = L \Rightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\} \ \lim_{t\to+\infty} F(t\vec{v}) = L$

**CONTINUITÀ** $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua se somma, prodotto, composizione di funzioni continue.

**TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$**: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è
- LIMITATO se $\exists C$ t.c. $\forall x \in D, |x| \le C$
- CHIUSO se $= \overline{D}$ o se $\forall \{x^{(n)}\} \subseteq D, \ x^{(n)} \to \bar{x} \in D$
- APERTO se $\forall x \in D \ \exists R > 0$ t.c. $B(x,r) \subseteq A$

**WEIERSTRASS**: se $F: D \to \mathbb{R}$ è continua in $D$ chiuso e limitato, allora esistono massimi e minimi globali.

**CONSEGUENZE**:
- Se $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) = +\infty \Rightarrow \exists$ MINIMO GLOB.
- Se $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua e $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) = -\infty \Rightarrow \exists$ MASSIMO GLOBALE.
- $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) = L \ \wedge \ \exists (\bar{x},\bar{y})$ t.c. $F(\bar{x},\bar{y}) < L \Rightarrow \exists$ MINIMO GLOBALE
- $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} F(x,y) = L \ \wedge \ \exists (\tilde{x},\tilde{y})$ t.c. $F(\tilde{x},\tilde{y}) > L \Rightarrow \exists$ MASSIMO GLOBALE
- Se trovo una direzione in cui il limite vale $\pm\infty$, ho trovato sup/inf.

# CALCOLO DIFFERENZIALE

DERIVATA DIREZ.: $\dfrac{\partial F(x_0)}{\partial v} = \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{F(x_0 + \varepsilon v) - F(x_0)}{\varepsilon}$ purché finito.

- Max/min hanno tutte le derivate direzionali nulle
- Deriv. parziali sono deriv. direz. ed hanno verso della base canonica.
- $F$ è DERIVABILE in un punto del dominio se in quel punto $\exists$ tutte le derivate parziali.
- $F \in C^1(A)$ se $\exists$ e sono continue tutte le derivate parziali in $A$.
- Se $F$ è derivabile in $A$, chiamiamo gradiente di $F$ il vettore
  $\text{grad } F = \nabla F = \left( \dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dfrac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial F}{\partial x_n} \right)$
  Esso indica direzione e verso di massimo accrescimento di $F$
- $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è DIFFERENZIABILE in $(x_0,y_0) \in A \iff$ possiamo scrivere
  $F(x_0+h, y_0+k) = F(x_0,y_0) + \dfrac{\partial}{\partial x} F(x_0,y_0)\, h + \dfrac{\partial}{\partial y} F(x_0,y_0)\, k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$

$F$ differenziabile in $(x_0,y_0) \Rightarrow$
- $F$ continua in $(x_0,y_0)$
- $\exists$ derivabile in $(x_0,y_0)$
- $F$ ammette derivate direzionali in $(x_0,y_0)$ lungo ogni direzione $v \in \mathbb{R}^2$ e vale la Formula del Gradiente.

la negazione di uno di questi implica la NON differenziabilità

master COPY COPISTERIA

▷ CONDIZIONE (FORTE) NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA DIFFERENZIABILITÀ:
$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diff. in $(x_0,y_0) \in A \subseteq$
- esistono le derivate parziali prime in $(x_0,y_0)$
- $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

▷ CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DIFFERENZIAB. – TEOREMA DIFFERENZIALE TOTALE
Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se ammette derivate parziali prime in un intorno sferico di $(x_0,y_0)$ e sono continue nel punto $(x_0,y_0)$, allora $f(x,y)$ è
- DIFFERENZIABILE in $(x_0,y_0)$

▷ FORMULA GRADIENTE: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A$ aperto, $f$ differenziabile in $x_0 \in A$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(x_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot \vec{v}$$

prodotto scalare

▷ FERMAT: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A$ aperto, $x_0 \in A$ p.to di max/min locale per $f$. Se $f$ è derivabile in $x_0$ allora

$$\nabla f(x_0) = 0$$

può essere

se il p.to critico non è di massimo/minimo, è un p.to di sella.

▷ LAGRANGE: Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme chiuso e $\bar{x} \in \partial\Omega$. Supponiamo che esista $\hat{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ : $\hat{f} := f$ e che sia differenziabile con continuità. Sia $g(x) = b$ il vincolo cui è soggetto $f$ definito in un intorno di $\bar{x}$, diff. con continuità. Se $\bar{x}$ è locale per il vincolo ($\nabla g(\bar{x}) \neq 0$), allora $\bar{x}$ può essere max/min per $f$ su $\partial\Omega \iff \exists \lambda$ (moltiplicatore dei Lag.) $\in \mathbb{R}$ t.c.

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$$

Il punto di estremo vincolato per $f$ è libero per la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - b)$$

- Definiamo MATRICE HESSIANA DI $f$ la matrice delle derivate seconde di $f$:

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Se $f$ ha derivate prime e seconde continue, vale il teorema di Schwartz e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Allora $H$ è simmetrica

$\mathbb{R}^2$

| det \ tr | $>0$ | $<0$ | $=0$ |
|---|---|---|---|
| $>0$ | MIN | MAX | X |
| $<0$ | SELLA | SELLA | SELLA |
| $=0$ | NON È MAX | NON È MIN | 0 |

$\mathbb{R}^3$

| det \ tr | $>0$ | $<0$ | $=0$ |
|---|---|---|---|
| $>0$ | NON È MIN | SELLA | SELLA |
| $<0$ | SELLA | NON È MIN | SELLA |
| $=0$ | NON È MAX | NON È MIN | SELLA SE $H \neq 0$ |

▷ PUNTO DI SELLA: punto critico ($\nabla f = 0$) in cui al variare della direzione considerata, si hanno diversi comportamenti: per alcune direzioni considerate un punto è di sella se la restrizione lungo una direzione ha un massimo e in un'altra direzione ha un minimo.

▷ SVILUPPO DI TAYLOR:

$$f((x,y)+\vec{v}) = f(x,y) + \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{v}^T H(x,y) \vec{v} + o(|\vec{v}|^2)$$

RIASSUNTO Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $f \in C^2(D)$
- Uso i teoremi di Weierstrass per dimostrare l'esistenza di max/min locali o globali
- Per max/min locali studio i punti critici con FERMAT e li classifico o con sviluppi o con risultati precedenti. Se sono tali uso l'Hessiano
- Per trovarli sul bordo o
  - parametrizzo il bordo
  - uso Lagrange

# CALCOLO INTEGRALE

- Domini rettangolari $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$: $\int_R F(x)dx = \int_{I_1}\int_{I_2}\cdots\left(\left(\int_{I_n} F(x)dx_n\right)dx_{n-1}\right)\cdots dx_1$
- Domini y-semplici (interni ha due funzioni verticali)

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_{min} \le x \le x_{max},\ \varphi^-(x) \le y \le \varphi^+(x)\}$$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

(Domini x-semplici: simile, la x varia in funzione della y)

AREA/MISURA di un insieme: $|D| = \iint_R dx\,dy$

- CAMBIO DI COORDINATE: Sia $\Phi: V \to V$ un cambiamento di coordinate di classe $C^1$ invertibile t.c.

$$\begin{cases} x = \Phi_1(u,v) \\ y = \Phi_2(u,v) \end{cases}$$

$$\iint_E f\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(E)} F(\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v)) \cdot \left|\det(D(\Phi))\right| du\,dv$$

- INTEGRALI TRIPLI:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \varphi^-(x,y) \le z \le \varphi^+(x,y)\}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\varphi^-}^{\varphi^+} f\,dz\right)dx\,dy$$

$$\Omega = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : h_1 \le z \le h_2,\ (x,y) \in R(z)\}$$

$$\iiint_\Omega f\,dx\,dy\,dz = \int_{h_1}^{h_2}\left(\iint_{R(z)} f\,dx\,dy\right)dz.$$

- COORDINATE CILINDRICHE

$$\Phi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z);\ dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

- COORDINATE SFERICHE

$$\Phi(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta),\ \varphi \in [0,\pi]$$

$$dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\varphi$$

- SOLIDI DI ROTAZIONE:

Sia $S$ il solido di rotazione attorno a descritto in coordinate cilindriche da: $S' = \{(\rho,\theta,z) \mid (\rho,z) \in E,\ \theta \in [0,\alpha]\}$

$$\mathrm{Vol}S = \int_S dx\,dy\,dz = \alpha\int_E \rho\,d\rho\,dz = \alpha\int_E x\,dx\,dz$$

CURVE: Sia $\varphi: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Definiamo curva l'immagine di $\varphi$

Se $\varphi$ è "abbastanza" di classe $C^1$, allora la lunghezza della curva è:

$$\mathrm{lung}_\varphi = \int_I \|\varphi'(t)\|\,dt$$

Se la curva è grafico di una funzione $F$

$$\mathrm{lung} = \int_a^b \sqrt{1 + [F'(t)]^2}\,dt$$

SUPERFICI: Data una parametrizzazione $\varphi: B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ di una funzione $f$ t.c. $\mathrm{graf}(F) \equiv$ superficie, essa ha area:

$$\int_B \left\|\frac{\partial}{\partial x}\varphi \wedge \frac{\partial}{\partial y}\varphi\right\| dx\,dy$$

Se ci è data la funzione $f$ esplicitamente, t.c. graf $(F) \equiv$ superficie allora esso vale: $\int_B \sqrt{1 + \|\nabla F\|^2}\, dxdy$

INTEGRALI CURVILINEI: se ho $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzazione di una curva e $g: \text{Im}(\varphi) \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\text{curva}} g = \int_0^1 \|D(\varphi(t))\|\, g(\varphi(t))\, dt$$

DIVERGENZA: dato $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, chiamo divergenza di $F$ la funzione

$$\text{div } F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n: \text{div } F := \frac{\partial}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} =$$

$$= \text{Tr}(D(F))$$

TEOREMA
Sia $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, allora:

$$\int_\Omega \text{div } F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu$$

$\nu$ versore normale esterno a $\partial\Omega$

$:=$ FLUSSO di un campo vettoriale $F$ uscente da una superficie chiusa

GENERALIZZAZIONE:

$$\int_\Omega g\,\text{div } F + F \cdot \nabla g = \int_{\partial\Omega} g\,(F \cdot \nu)$$

VETTORE NORMALE: $\nu = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}$, $g$ funzione che si annulla sulla superficie. (va controllato il segno)

calcolo $\frac{(x,y,z) - (c_x, c_y, c_z)}{R}$

SOLIDI DI ROTAZIONE: sia $w \in Oyz$. Il volume del solido di rotazione $\Omega$ che si ottiene da una rotazione di $w$ attorno all'asse $z$ è

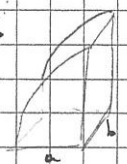
$$|\Omega| = 2\pi \int_y \int_z y\, dydz$$

master COPY
master COPY
master COPY COPISTERIA

COSE UTILI:

- $|x+y| \le |x|+|y|$
- $\frac{a}{b+c} \le \frac{a}{b}$ $(b+c>b)$ , $a,b,c>0$
- $\sin\theta \le \theta$ $(|\sin(\varphi(t))| \le |\varphi(t)|)$ $\varphi(t) \to 0$ per $t \to 0$
- $\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$
- $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ ; $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x = \pi/4$
- $\int_a^b \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_{\operatorname{arcsinh} a}^{\operatorname{arcsinh} b} \cosh^2 z\,dz = \int_{\operatorname{asinh} a}^{\operatorname{asinh} b} \frac{1+\cosh 2z}{2}\,dz = \left[\frac{\operatorname{arcsinh} t + t\sqrt{1+t^2}}{2}\right]_a^b$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

  $\cosh^2 x = \frac{1+\cosh 2x}{2}$ $\qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

  $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $\mathrm{Cono} = \{(x,y,z) : 0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le \left(\frac{R}{h} z\right)^2\} = \{(\rho,\theta,z) : 0 \le z \le h,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \rho \le \frac{R}{h} z\}$
  - Ellisse: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = q\cos\theta \end{cases}$
- Elica circolare: $\gamma(t) = (r\cos\omega t,\ r\sin\omega t,\ vt)$
- SPIRALE: $t: \begin{cases} \rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta \\ \rho = vt \\ \theta = \omega t \end{cases} \to \gamma(t) = (vt\cos\omega t,\ vt\sin\omega t)$
- 

$\Omega = \int_{\theta=0}^{\pi/2} R\theta \quad (a\cos\theta,\ b,\ \theta + a\sin\theta)$
- $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$
- $x^4 \ge x^2 - 1$
- ~~$\sin(\varphi$~~
- $e^{\alpha}+1 \le e^{|x|}+e^{|y|}$ , $\alpha := \max\{|x|,|y|\} \to +\infty$ , $a := \max\{|x|,|y|\}$
- $\int \frac{1}{\sinh} = \ln(\tanh(\cdot)) = \ln\left(\tanh\frac{x}{2}\right)$

- Sup. Rotazione: Data una curva $\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases}$ la Sup. che si ottiene facendo ruotare attorno asse y è $\Sigma: \begin{cases} x = a(t)\cos\theta \\ y = b(t) \\ z = a(t)\sin\theta \end{cases}$

(le variab. che non c'è prende la funzione da quella il cui asse non ruota)