NORMA o DISTANZA IN $\mathbb{R}^n$: LA NORMA TRA DUE PUNTI IN $\mathbb{R}^n$ É DEFINITA COME:

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

NON DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO

LIMITI IN $\mathbb{R}^n$

- SIA $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ T.C $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \forall \eta > 0$ $\{(x,y) : |(x,y)-(\bar{x},\bar{y})| < \eta\} \cap A \neq 0$ } CHIUSURA $\bar{A}$ ↓ L'INSIEME DI TUTTI I PUNTI A DISTANZA NULLA (INFINITAMENTE VICINI) DA A

  $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{A}$ ALLORA:

  $$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = l \quad \text{SE } \forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \text{ T.C } \forall (x,y) \in A$$

  $$|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})| < r \Rightarrow |f(x,y)-l| < \varepsilon$$

- SIA $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{A}$

  $$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x,y) = \pm\infty \quad \text{SE } \forall K \ \exists r > 0 \text{ T.C } \forall (x,y) \in A$$

  $$|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})| < r \Rightarrow f(x,y) \gtrless K$$

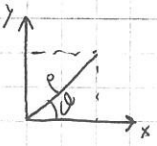
- DATA $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e DATA "UNA DIREZIONE" $v \in \mathbb{R}^3$, SI DICE LIMITE DIREZIONALE DI f IN UN PUNTO $(0,0,0)$ IL LIMITE:

  $$\lim_{t\to 0} f(t \cdot v)$$ PURCHÉ ABBIA SENSO, CIOÉ $\exists \delta$ SUFFICIENTEMENTE PICCOLO T.C $\forall v \in \mathbb{R}^3$

  $\not\exists$ ⇒ LIMITE GENERALE NON ESISTE

  2 DIREZIONALI DIVERSI ⇒ LIMITI DIREZIONALI UGUALI, BOH, NON SO SE PUÓ ESISTERE

- SE $|f(x)| \to 0$ DA UNA PARTE, ALLORA $f(x) \to 0$ IN QUELLA PARTE

- 

  $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ ⇒ $\lim_{|(x,y)|\to 0} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} f(\rho,\theta)$

- $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$ t.c $|(x,y)| < r \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$

- $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = \pm\infty$ se $\forall M \ \exists r > 0$ t.c $|(x,y)| > r \Rightarrow f(x,y) \gtrless M$

- $\lim_{t\to+\infty} f(t \cdot v)$ con $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\text{origine}\}$

↳ $X \subset \mathbb{R}^2$, se $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \ell$ allora $\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t \cdot v) = \ell$

dato $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, voglio dimostrare che:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{t} > 0$ t.c $\forall t > \bar{t}$, $|f(t \cdot v) - \ell| < \varepsilon$

1) dato $\varepsilon > 0 \ \exists R$ t.c $|x| > R \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

2) sapendo che se $|t \cdot v| > R \Rightarrow |f(t \cdot v) - \ell| < \varepsilon$

3) $|t \cdot v| = |t| \cdot |v|$, $|t \cdot v| > R \Leftrightarrow |t|\,|v| > R$

$$\Leftrightarrow |t| > \frac{R}{|v|} = \bar{t}$$

4) per questo $\bar{t}$ l'enunciato è verificato

CONTINUITÀ

- sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $\bar{x} \in D$.

f si dice continua in $\bar{x}$ se $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$ oppure se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c } |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

- una funzione si dice continua se è continua in ogni punto del suo dominio

inoltre: la somma tra funzioni continue è continua
il prodotto tra funzioni continue è continuo
le componenti sono continue
la composizione di funzioni continue è continua

- f è continua in $x \in D \Leftrightarrow \forall x_n \in D$ con $x_n \to x \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$

INSIEME CHIUSO: SIA $E \subseteq \mathbb{R}^n$, DICIAMO CHE E È CHIUSO SE COINCIDE CON LA SUA CHIUSURA $\bar{E} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0,\ B(x,r) \cap E \neq 0 \} \supseteq E$

PALLE DI CENTRO x E RAGGIO r

È È CHIUSO $\Leftrightarrow$ OGNI SUCCESSIONE IN E CHE CONVERGE HA LIMITE IN E

$\Rightarrow$) SIA $\{x_n\}$ SUCCESSIONE IN E T.C $x_n \to \bar{x}$, DIMOSTRIAMO CHE $\bar{x} \in E$. SIA $r > 0$, SAPPIAMO CHE $|x_n - \bar{x}| \to 0$.

ALLORA $\forall r\ \exists \bar{n}$ T.C $\forall n \geq \bar{n} \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < r$ CIOÈ

$x_n \in B(\bar{x}, r) \cap E$

$\Leftarrow$) SE E NON È CHIUSO ALLORA $\exists \bar{x} \in \bar{E} \setminus E$.

$\forall r > 0$ $(\bar{x} \in \bar{E})$ $B(\bar{x}, r) \cap E \neq 0$ (PER DEF DI $\bar{E}$), CIOÈ

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n}) \cap E$ MA $x_n \to \bar{x}$ $\Rightarrow E$ CHIUSO PER DEF

INSIEME APERTO: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^n$, DICIAMO CHE A È APERTO SE IL SUO COMPLEMENTARE $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ È CHIUSO.

A È APERTO $\Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists r > 0$ T.C $B(x,r) \subseteq A$

$\Rightarrow$) SUPPONGO $x \in A$ E $\forall r > 0$ $B(x,r) \setminus A \neq 0$. ALLORA $\exists \{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ CON $|x_n - x| < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x$

OSSERVO CHE $x_n \in \mathbb{R}^n \setminus A$, x_n HA LIMITE IN $A \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ NON È CHIUSO.

$\Leftarrow$) SUPPONGO CHE $\forall x \in A\ \exists r > 0$ T.C $B(x,r) \subseteq A$, $\mathbb{R}^n \setminus A$ È CHIUSO?

SIA $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ CON $x_n \to x$, SE $x \in A$ ESISTEREBBE $r > 0$ T.C $B(x,r) \subseteq A$. ALLORA $\forall n$ $x_n \notin B(x,r) \Rightarrow |x_n - x| > r$

ASSURDO!

DATA UNA SUCCESSIONE $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ LIMITATA, $\exists$ UNA SUA SOTTOSUCCESSIONE CHE CONVERGE.

DATA $f : D \to \mathbb{R}$ POSSO PRENDERE $\{x_n\} \subseteq D$ MASSIMIZZANTE, OVVERO TALE CHE $x_n \to \sup f$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

SIA $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, f CONTINUA IN D INSIEME COMPATTO

$\exists$ RISPETTIVAMENTE UN PUNTO DI MASSIMO E MINIMO GLOBALI

TEOREMA DI WEIERSTRASS GENERALIZZATO

SIA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA E $\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ E $\exists x$ T.C $f(x) < l$

$\Rightarrow$ $\exists$ MINIMO GLOBALE



DERIVATE DIREZIONALI

DATA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, CHIAMIAMO DERIVATA DIREZIONALE DI f NEL PUNTO x IN DIREZIONE v IL NUMERO:

$$\frac{d}{dv} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$$

SE LA DERIVATA ESISTE E VIENE VALUTATA IN UN PUNTO DI MAX O MIN ALLORA QUESTA DEVE ESSERE 0, I PUNTI DI MAX E MIN HANNO TUTTE LE DERIVATE DIREZIONALI NULLE IN QUEL PUNTO

INOLTRE VALE ANCHE LA OMOGENEITÀ: $\frac{d}{d(\lambda v)} f(x) = \lambda \cdot \frac{d}{dv} f(x)$

SIA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ T.C $\frac{\partial}{\partial e_1} f$ E $\frac{d}{de_2} f$ ESISTANO IN UN INTORNO E SIANO CONTINUE IN (x,y), ALLORA:

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \frac{d}{dv} f(x,y) = v_1 \cdot \frac{d}{de_1} f(x,y) + v_2 \cdot \frac{d}{de_2} f(x,y)$$

DERIVATE PARZIALI

POICHÉ LE DERIVATE DIREZIONALI ESISTONO E SIANO CONTINUE IN UN INTORNO DI (x,y) ABBIAMO CHE LA DERIVATA DIREZIONALE, IN QUALSIASI DIREZIONE, È LA COMBINAZIONE LINEARE DELLE DIREZIONI LUNGO GLI ASSI, OSSIA LE DIREZIONI CANONICHE.

DATA $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ E DATO $x \in \mathbb{R}^n$ UN PUNTO, CHIAMIAMO DERIVATE PARZIALI LE DERIVATE DIREZIONALI NELLE DIREZIONI CANONICHE $e_1, e_2 \dots e_n$ NEL PUNTO x

GRADIENTE

DATA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, È DI CLASSE $C^1(\mathbb{R}^n)$ SE È CONTINUA E CON LE SUE DERIVATE PARZIALI CHE ESISTONO E SONO CONTINUE, E DATO UN PUNTO $x \in \mathbb{R}^n$ CHIAMIAMO GRADIENTE DI f IN x IL VETTORE DELLE DERIVATE PARZIALI VALUTATE IN QUEL PUNTO

$$\nabla f(x) = \left(\frac{df}{dx_1}(x), \dots, \frac{df}{dx_n}(x) \right)$$

UNA DERIVATA DIREZIONALE IN DIREZIONE v SARÀ DUNQUE: $\frac{d}{dv} f = v \circ \nabla f(x)$

PUNTO CRITICO: DATA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}^n)$, UN PUNTO $x \in \mathbb{R}^n$ È DETTO CRITICO SE $\nabla f(x) = 0$.

I PUNTI DI MAX/MIN LOCALI E GLOBALI SONO PUNTI CRITICI

UN PUNTO CRITICO È UN POSSIBILE CANDIDATO PER ESSERE MAX/MIN

master COPY COPISTERIA

∇f È LA DIREZIONE IN CUI CRESCO DI PIÙ, LA DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA, VERSO L'ALTO, È PARALLELA AL GRADIENTE

$$\frac{d}{dv} f = \nabla f \circ v = |\nabla f| \cdot |v| \cdot \cos\vartheta \leq |\nabla f|$$

NORMALE USCENTE: SE $\bar{x} \in \partial D$ (BORDO DI D), $f : D \to \mathbb{R}$, LA DIREZIONE PERPENDICOLARE USCENTE (O NORMALE USCENTE) A ∂D IN $\bar{x}$ DEVE ESSERE T.C DATO $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \lambda (*,*)$

DATO $\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^n, \gamma(x) = 0 \}$ E $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, LA DIREZIONE NORMALE È PARALLELA A $\nabla g(x)$ SE $\nabla g \neq 0$

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

DA $f : D \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \partial D$, $\exists \tilde{f}$ IN UN INTORNO DI $\bar{x}$ ($\tilde{f}$ CONTINUA E DIFFERENZIABILE) CON $f = \tilde{f}$ IN D. SE HO UN INTORNO DI $\bar{x}$ IN CUI $\partial D = g = 0$ E $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE E CONTINUA E $\nabla g(\bar{x}) \neq 0$:

$\bar{x}$ È PUNTO MAX/MIN DI f IN $D \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ T.C $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$

DOVE λ = MOLTIPLICATORE DI LAGRANGE

$\Rightarrow$ CALCOLO MAX/MIN DI FUNZIONI SUL BORDO DEL LORO DOMINIO