$\mathbb{R}^M$ = insieme delle M-uple $\{(x_1, x_2, \dots, x_M) = \underline{x} \ / \ x_1, x_2, \dots x_M \in \mathbb{R}\}$ (VETTORE) T.C.

[SPAZIO VETT. di dim M]

$\underline{e}^{(J)} = (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad 1 \leq J \leq M$ [$\underline{e}^{(J)}$ = J-esimo vettore (della BASE CANONICA)]

APPL. LINEARE ↳ $f: \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ (I) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; (II) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$\mathbb{R}$ → campo degli scalari → $\alpha \in \mathbb{R}$ [M = M^{esimo} insieme di vettori che andrà a comporre $\mathbb{R}^M$]

VERSORI, BASE ORTONORMALE.

FORMA BILINEARE: funzione che va da $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ a $\mathbb{R}$ [è lineare due volte] ↳ $\varphi: \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(x,y)$ $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ nella 1ª e nella 2ª

+ tra numeri

PROPRIETÀ DI (BI)LINEARITÀ $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^M$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

① $\langle \underline{x}+\underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$

1 BIS $\langle \underline{x}, \underline{y}+\underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle$

② $\langle \alpha \underline{x}, \underline{y} \rangle = \alpha \cdot \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

2 BIS $\langle \underline{x}, \alpha \underline{y} \rangle = \alpha \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

COSA LEGGI



PRODOTTI SCALARI:

Def: ① si dice prodotto scalare su $\mathbb{R}^M$ una forma bilineare $\langle \ , \ \rangle$ tale che $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle \ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^M$ [proprietà di simmetria]

$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ e $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ [proprietà di positività] o non negatività

[PRODOTTO SCALARE DEGENERE ↲ $\exists \underline{x} \neq \underline{0} / \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0 \ \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^M$]

Def: ② si dice norma di $\underline{x} \in \mathbb{R}^M$ relativa (al prodotto scalare $\langle \ , \ \rangle$)

$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle} \quad \|\underline{x}\|^2 = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle$

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ: se $\langle \ , \ \rangle$ prodotto scalare su $\mathbb{R}^M$ si ha $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^M$

$\underline{x} \neq 0$, $\underline{y} \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

dim: $\|\underline{x} + \alpha \underline{y}\|^2 = \langle \underline{x} + \alpha \underline{y}, \underline{x} + \alpha \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{x} + \alpha \underline{y} \rangle + \underline{V}$ $+ \langle \alpha \underline{y}, \underline{x} + \alpha \underline{y} \rangle$

$= \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + 2\alpha \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \alpha^2 \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle =$

$0 \leq \|x + \alpha y\|^2$ $= \|\underline{x}\|^2 + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \cdot \|y\|^2$ ↘

↳ scelgo $\alpha = -\frac{\langle X,Y\rangle}{\|Y\|^2} \Rightarrow \|X\|^2 - 2\frac{\langle X,Y\rangle^2}{\|Y\|^2} + \frac{\langle X,Y\rangle^2}{\|Y\|^2} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{|\langle \underline{X},\underline{Y}\rangle|^2}{\|\underline{Y}\|^2} \leq \|\underline{X}\|^2 \Rightarrow |\langle \underline{X},\underline{Y}\rangle|^2 \leq \|\underline{X}\|^2 \cdot \|\underline{Y}\|^2$

OSS: se $\underline{X}=0 \Rightarrow \langle \underline{0},\underline{Y}\rangle = \langle \underline{X}-\underline{X},\underline{Y}\rangle = \langle \underline{X},\underline{Y}\rangle - \langle \underline{X},\underline{Y}\rangle = 0$

DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI:

$\|\underline{X}+\underline{Y}\| \leq \|\underline{X}\| + \|\underline{Y}\| \quad \forall \underline{X},\underline{Y} \in \mathbb{R}^M$

→ RAGIONAMENTO SIMILE a quello per SCHWARTZ

dim: $\|X+Y\|^2 = \|\underline{X}\|^2 + 2\langle \underline{X},\underline{Y}\rangle + \|\underline{Y}\|^2 \leq \|\underline{X}\|^2 + 2\|\underline{X}\|\|\underline{Y}\| + \|\underline{Y}\|^2 = (\|\underline{X}\|+\|\underline{Y}\|)^2$ (MAGGIORAZIONE (due volte Schwartz))

$\Rightarrow \|\underline{X}+\underline{Y}\| \leq \|X\| + \|Y\|$

PROPRIETÀ DELLA NORMA: $\|\ \| = \langle\ ,\ \rangle^{1/2}$ $\langle\ ,\ \rangle$ prodotto scalare

① $\|\underline{X}\| = \|-\underline{X}\|$.

② $\|\alpha \cdot \underline{X}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{X}\|$.

③ $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

master COPY

dim (②): $\langle \alpha\underline{X}, \alpha\underline{X}\rangle^{1/2} = \left(\alpha^2 \langle \underline{X},\underline{X}\rangle\right)^{1/2} = |\alpha| \langle \underline{X},\underline{X}\rangle^{1/2} = |\alpha| \cdot \|\underline{X}\|$

dim (①): $\alpha = -1 \Rightarrow \|-\underline{X}\| = |-1| \cdot \|\underline{X}\| = \|\underline{X}\|$

PRODOTTO SCALARE CANONICO in $\mathbb{R}^M$:

$\underline{X} = (X_1, \dots, X_M)$;
$\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)$;

def: $\langle \underline{X},\underline{Y}\rangle = \sum_{J=1}^{M} X_J Y_J = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \dots + X_MY_M$

$\Rightarrow \langle \underline{X},\underline{X}\rangle = \|\underline{X}\|^2$ $\sum_{J=1}^{M} X_J^2 \geq 0$ $\|\underline{X}\| = 0 \Rightarrow \underline{X} = \underline{0}$

$\|\underline{X}\| = \sqrt{\sum_{J=1}^{M} X_J^2}$ $\underline{X} = (X_1, \dots, X_M)$;

DISTANZA:

def: dato X insieme, si definisce distanza su X una funzione

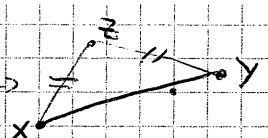
$d: X \times X \to \mathbb{R}$

① [$d: (X,Y) \geq 0$ $\forall X,Y \in X$; $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$;] (1ª PROPRIETÀ)

$\begin{cases} d(X,Y) \geq 0 \\ d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$

② $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

③ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ → DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE



Se $X = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ (POSITIVO) $\quad d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\|$



$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ $\quad \underline{u} = x-z$, $\underline{v} = z-y \Rightarrow \underline{u}+\underline{v} = x-y$

$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\|$

DISTANZA EUCLIDEA: su $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ (PRODOTTO SCALARE CANONICO)

def: si dice distanza euclidea $d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} = \|x-y\|$

OSS: $n=1 \rightsquigarrow d(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$

PALLA:

def: dato $x \in \mathbb{R}$ si definisce palla (sfera) aperta di centro $\underline{x}_0$ e raggio $r > 0$ l'insieme $B(\underline{x}_0, r) = B_{\underline{x}_0}(r) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 / \|\underline{x}-\underline{x}_0\| < r\}$

DISTANZE EQUIVALENTI: (X, d_1) (Y, d_2) spazi metrici dotati

$\exists a, b \in \mathbb{R}^+ \mid a \cdot d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq b\, d_2(x,y) \quad \forall x,y \in X$

es: $X = \mathbb{R}^2$ come mai sono equivalenti?

$d_1(\underline{x},\underline{y}) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

$d_2(\underline{x},\underline{y}) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$



$\mathbb{R} \ni \alpha, \beta \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leq |\alpha| + |\beta|$

$\Updownarrow \quad \alpha^2+\beta^2 \leq \alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta| \quad (\leq)$

$\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ← $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \overset{?}{\geq} \frac{1}{2}(|\alpha|+|\beta|)$ → va bene?

$\alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|)$

$3\alpha^2+3\beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$

$\alpha^2+\beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$

$(\alpha-\beta)^2 \geq 0$

$d_1 \leq \underset{b=1}{1} \cdot d_2$

$\frac{1}{2} d_2 \leq d_1 \leq 1 \cdot d_2$

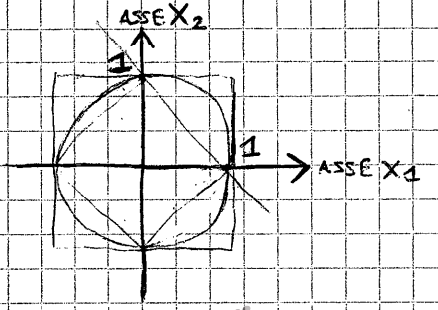
$\downarrow$

$\frac{1}{\sqrt{2}} d_2 \leq d_1 \leq 1 \cdot d_2$

$\searrow$

$d_3(\underline{X},\underline{Y}) = \max(|X_1-Y_1|, |X_2-Y_2|)$ $\quad a \cdot d_1 \leq d_3 \leq b \cdot d_2$

$B(\underline{0}, R)$



$|X_1| + |Y_1| = 1$ $\quad X_2 + X_1 = 1$

↓ la somma di tutte le coordinate dentro la sfera sono uguali a 1.

Se $\forall B\, d_1(\underline{X}_0^1, R) \exists B\, d_2(\underline{X}_0, r') \subset B\, d_1(\underline{X}_0, R)$

$C^0([0;1])$ $\quad f:[0;1] \to \mathbb{R}$ f continua f e g sono due funzioni

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g(x)\, dx$

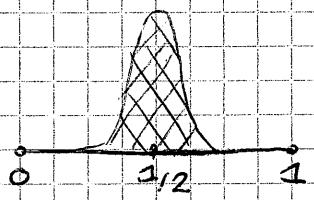
La bilinearità è presente

- $\int_0^1 (f+h)\cdot g(x)\, dx = \int_0^1 f \cdot g(x)\, dx + \int_0^1 h \cdot g(x)\, dx$
  $\langle f+h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$
- $\int_0^1 \alpha \cdot f \cdot g(x)\, dx = \alpha \cdot \int_0^1 f \cdot g(x)\, dx$
  $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \cdot \langle f, g \rangle$

$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \hookrightarrow \int_0^1 f \cdot g(x)\, dx = \int_0^1 g(x) \cdot f\, dx$

$\langle f, f \rangle = \|f\|^2 \hookrightarrow \int_0^a f^2(x)\, dx \geq 0$

$\| \quad 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0;1]$



Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$f, g \subseteq C^0([a, b])$ $\quad \left| \int_a^b f g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b g^2(x)\, dx \right)^{1/2}$

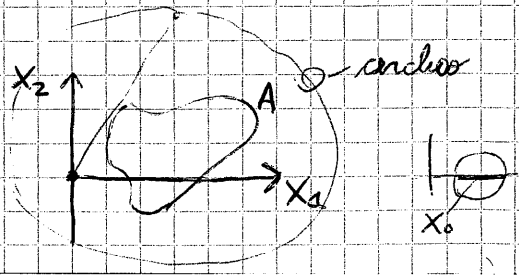
$\mathbb{R}^M \xrightarrow{\langle , \rangle \text{ PROD SCAL. CANONICO}} \xrightarrow{\text{STRUTTURA NORMATA}} \| \| \longrightarrow d$

Dato $X_0 \in \mathbb{R}^M$ e $X > 0$ $\quad B(X_0, R) = \{ \underline{X} \in \mathbb{R}^M \mid \|\underline{X} - \underline{X}_0\| < R \}$

INSIEME LIMITATO:

def: sia $A \subseteq \mathbb{R}^M$ A si dice limitato se $\to$

$\to \exists B(\underline{0}, R) \,/\, A \subseteq B$ (↓ origine)



INTORNO DI UN PUNTO:

def²: sia $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dice intorno di X_0 un qualunque insieme $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\exists\, B(X_0, r) \mid X_0 \in B(X_0, r) \subseteq U$

PUNTO INTERNO:

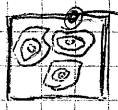
def³: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $X_0 \in A$, X_0 si dice interno ad A se $\exists\, U$ intorno di $X_0 \mid U(X_0) \subseteq A$.



PUNTO DI FRONTIERA:

def⁴: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $X_0 \in A$, X_0 si dice di frontiera per A se $\forall U$ intorno di X_0 si ha $U \cap A \neq \emptyset$ [qualunque intorno interseca A e il suo complementare]

$U \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$ (COMPLEMENTARE)


X_0 è un pto di frontiera

oss¹: se $X_0 \in \mathbb{R}^n$ ma $X_0 \notin A$, la def³ continua ad essere valida.

oss²: si dice esterno ad A un punto X_0 interno a $\mathbb{R}^n \setminus A$.

PARTE INTERNA:

def⁵: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice parte interna di A l'insieme

$\mathring{A} = \{ X \in A \mid X$ (TALE CHE) X interno ad $A \}$

FRONTIERA:

def⁶: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice frontiera di A l'insieme $\partial A = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid X$ è di frontiera per $A \}$

INSIEME APERTO:

def⁷: sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A si dice aperto se $X \in A \Rightarrow X$ interno frontiera di A ed A cioè se $A = \mathring{A}$.

INSIEME CHIUSO:

def⁸: sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$, C si dice chiuso se il suo complementare, cioè $\mathbb{R}^n \setminus C$, è aperto.

PROP: $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso $\iff \partial C \subseteq C$ (frontiera; ovvero contiene la frontiera)

$\partial C \subseteq C \Rightarrow C$ chiuso $(\mathbb{R}^n \setminus C) \cap \partial C = \emptyset$

[$A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $X_0 \in A$ se]