LOGICA ELEMENTARE

Logica < proposizioni (frasi che possono essere o vere o false)
predicati (proposizioni con una variabile, dal valore della quale dipende se la frase è vera o falsa)

Proposizioni e predicati possono unirsi in due modi:

p∧q	p	q	p∨q
V	V	V	V
F	V	F	V
F	F	F	F
F	F	V	V

- Alternazione $p \circ q \iff p \vee q$
- Congiunzione $p \in q \iff p \wedge q$

Negazione (non p, $\bar{p}$, $\neg p$)

p	non p
V	F
F	V

- Data p come proposizione ottengo due: $\exists x \setminus \text{non } p \iff \forall x\ p$.

- negare un'alternazione
  non (p o q) => vuol dire che ENTRAMBE le proposizioni devono essere FALSE
  non (p o q) <=> (non p) e (non q)
- negare una congiunzione
  non (p e q) => vuol dire che è sufficiente che UNA sia FALSA affinché l'intera congiunzione sia falsa.
  non (p e q) <=> (non p) o (non q) · non è esclusivo "o", dunque possono essere anche entrambe false

Implicazione $\Rightarrow$

$p \Rightarrow q$ "p implica q" o "se p allora q...".

p	q	p⇒q
V	F	F
V	V	V
F	F	V
F	V	V

- se p è falsa allora q può fare ciò che vuole
- se p è vera allora anche q deve essere vera

Coimplicazione $\iff$

$p \iff q = p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$

p⇔q	p	q
V	V	V
F	V	F
F	F	V
V	F	F

· concetto di UGUAGLIANZA

INSIEMI

L'insieme è un concetto primitivo del quale non posso dare una definizione, ma posso esprimere i due modi nei quali questo può essere rappresentato:

1. elenco (non conta l'ordine), (no ripetizioni)

   $\mathbb{N}\{1,2,3,4\}$ · è utile quando si ha un insieme con pochi elementi.

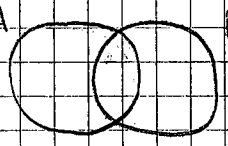
2. proprietà caratteristica

   $A\{x \in A \mid \text{proprietà caratteristica}\}$

Dati due insiemi A e B questi possono interagire nei seguenti modi:

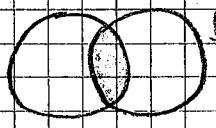
- Unione tra due insiemi

  $A \cup B$ "altercazione"



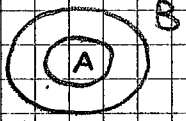
- Intersezione tra due insiemi

  $A \cap B$ "congiunzione"



- Inclusione o Implicazione

  $B \Rightarrow A$



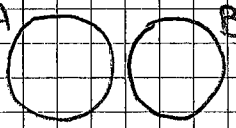
- Coimplicazione

  $A \Leftrightarrow B$



"COINCIDENTI"

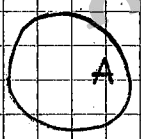
- Insieme vuoto ($\emptyset$)



"DISGIUNTI"

"Si dice vuoto l'insieme "unico" privo di elementi". I due insiemi sono detti DISGIUNTI.

- Complementare $\complement_E A$



Si definisce "complementare di A in E" l'insieme dei punti di E che non appartengono ad A.

master COPY

Prodotto cartesiano $(A \times B)$

Si definisce prodotto cartesiano tra due insiemi, l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$.

$A \{a, a_1, a_2\}$

$B \{b, b_1, b_2\}$

$$A \times B \begin{Bmatrix} (a,b) & (a,b_1) & (a,b_2) \\ (a_1,b) & (a_1,b_1) & (a_1,b_2) \\ (a_2,b) & (a_2,b_1) & (a_2,b_2) \end{Bmatrix}$$

Dimostrazione per assurdo

$p \Rightarrow q \iff$ non $q \Rightarrow$ non p · negazione della tesi, per arrivare a negare l'ipotesi.

INSIEMI NUMERICI

- $\mathbb{N} \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z} \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ insieme dei numeri interi relativi
- $\mathbb{Q} \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \neq 0 \right\}$ · insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R}$ insieme dei numeri reali
- $\mathbb{C}$ insieme dei numeri complessi

I NUMERI REALI $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali viene definito attraverso tre assiomi:

1. $\mathbb{R}$ è un campo (assioma algebrico)
2. $\mathbb{R}$ è un campo ordinato (assioma di ordinamento)
3. $\mathbb{R}$ è un campo completo (assioma di continuità).

Le proprietà 1 e 2 sono proprie anche dell'insieme dei numeri razionali $(\mathbb{Q})$, mentre la 3. è caratteristica dell'insieme $\mathbb{R}$, ed è la dimostrazione del fatto che la retta $\mathbb{R}$ "non ha buchi", al contrario di $\mathbb{Q}$, che invece ne ha infiniti (per esempio).

Analizzo dunque le proprietà di $\mathbb{R}$:

1. $\mathbb{R}$ è un campo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$\mathbb{R}$ può essere definito un CAMPO, (come anche $\mathbb{Q}$) perché in $\mathbb{R}$ sono possibile le operazioni di addizione e moltiplicazione che presentano le seguenti proprietà:

SOMMA

$x+y = y+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (proprietà commutativa)

$x+y+z = x+(y+z) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (proprietà associativa)

$x+0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro 0)

$x+(-x) = 0$ ($\exists$ l'opposto $(-x)$)

PRODOTTO

$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (proprietà commutativa)

$x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (proprietà associativa)

$x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (elemento neutro 1)

$x \cdot x^{-1} = 1 \quad \forall x \neq 0$ ($\exists$ il reciproco x^{-1})

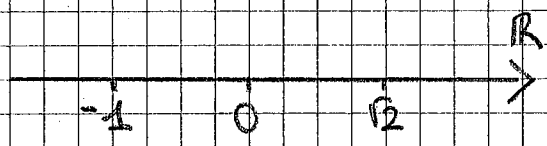
Le due operazioni sono accomunate da una proprietà:

$x(y+z) = xy + xz$ (proprietà distributiva "del prodotto rispetto alla somma".)

Conseguentemente posso dunque affermare che nell'insieme $\mathbb{R}$ sono possibili tutte e 4 le operazioni.

2. $\mathbb{R}$ è un campo ordinato $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

Provando a rappresentare $\mathbb{R}$ otteniamo il seguente grafico:



Da questa rappresentazione notiamo che nell'insieme $\mathbb{R}$ esiste una RELAZIONE D'ORDINE, quella $\leq$ che siano verificate le seguenti proprietà:

solo per $\leq$ · $x \leq x$ (proprietà riflessiva)

· $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (proprietà antisimmetrica)

vale anche con $<$ · $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (proprietà transitiva)

Dunque un campo è ordinato quando questo possiede la proprietà riflessiva, quella antisimmetrica e quella transitiva; inoltre si definisce "totalmente ordinato" quando $\forall a$ e b che scelgo, questi sono SEMPRE confrontabili

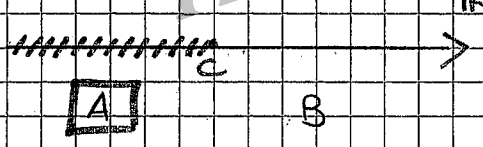
Un campo si definisce CAMPO, un insieme dove valgono le proprietà di somma e prodotto, e si definisce CAMPO ORDINATO un insieme dove valgono le proprietà di somma e prodotto e dove esiste una relazione d'ordine.

3. $\mathbb{R}$ è un campo completo $\Rightarrow$ ovvero ogni elemento di $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta

A.C = $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x > 0$ $\exists!$ $\sqrt[n]{x}$

AC = assioma di completezza

Dati due insiemi A e B, $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$ (ovvero A e B sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$) si dice che A sta a sinistra di B se:



$\forall a \in A, \forall b \in b \quad a \leq b$

(tutti gli $a \in A$ sono $\leq$ di tutti i $b \in B$).

Proprietà di completezza: Dati due insiemi $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ $\in \mathbb{R}$, se A sta a sinistra di B, allora esiste almeno un punto $c \in \mathbb{R}$ tale che:

$a \leq c \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$c \leq b \quad \forall b \in \mathbb{R}$

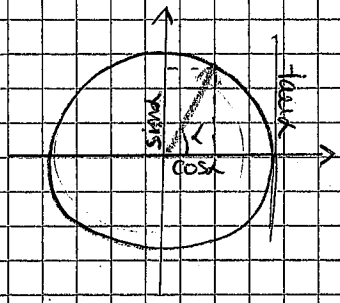
$\exists! \, c \mid c^2 \geq a^2 \text{ e } c^2 \leq b^2$

$\exists c \in \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B$

- dove c non è uno spazio vuoto, come nel caso di $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$.

$\exists!$ = esiste un solo

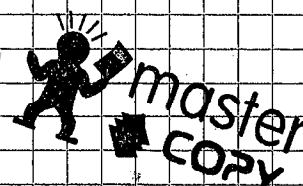
TRIGONOMETRIA



x	cos(x)	sin(x)
0	1	0
π	-1	0
$\pi/2$	0	1
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1

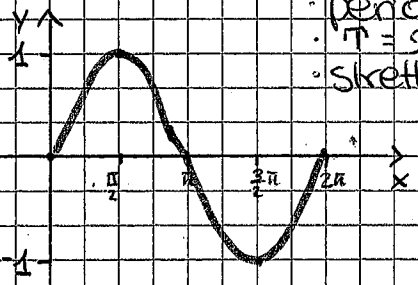
PROPRIETÀ FONDAMENTALE:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$



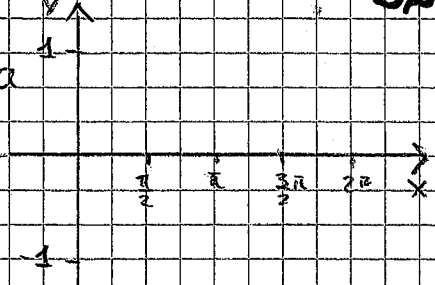
sin x

- dispari
- periodica
- $T = 2\pi$
- strett. >



cos x

- pari
- periodica
- $T = 2\pi$
- strett. <



- il grafico di cos x risulta essere uguale a quello di sin x spostato verso sinistra di $\frac{\pi}{2}$