DIFFERENZIABILITÀ

Calcolare le derivate parziali di $\begin{cases} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) & \text{per } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ e dire dove è differenziabile.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\log(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x$ per $(x,y)\neq(0,0)$

  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\log(x^2+y^2) + (x^2+y^2)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y$ per $(x,y)\neq(0,0)$

- Le derivate parziali, per $(x,y)\neq(0,0)$, esistono e sono continue su tutto $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\log t^2}{t} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ esiste e vale 0.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))+f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\log t^2}{t} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste e vale 0.

- Determiniamo ora se $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sono continue in $(0,0)$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\log(x^2+y^2) + 2x \overset{?}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ (CONTINUITÀ: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$)

$y=\lambda x$: $\lim_{x\to 0} 2x\log(x^2+\lambda^2x^2) + 2x = 0$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2y\log(x^2+y^2) + 2y \overset{?}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$y=\lambda x$: $\lim_{x\to 0} 2\lambda x\log(x^2+\lambda^2x^2) + 2\lambda x = 0$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

- Il dominio è $\mathbb{R}^2$ e f è continua su tutto $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

Per determinare la continuità in $(0,0)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2) \overset{?}{=} f(0,0) = 0$

$y=\lambda x$: $\lim_{x\to 0} (x^2+\lambda^2x^2)\log(x^2+\lambda^2x^2) = 0$

Quindi f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

Le derivate parziali esistono e sono continue su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$.

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Discuti la differenziabilità di $f(x,y) = |y| \operatorname{sen}(x^2+y^2)$

Il dominio è $\mathbb{R}^2$. Su $\mathbb{R}^2$ f è continua perché composizione di funzioni continue.

f inoltre è derivabile per $y \neq 0$ (in $y=0$ c'è un punto angoloso)

$$f = \begin{cases} y \operatorname{sen}(x^2+y^2) & \text{per } y \geq 0 \\ -y \operatorname{sen}(x^2+y^2) & \text{per } y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y \cos(x^2+y^2) \cdot 2x & y \geq 0 \\ -y \cos(x^2+y^2) \cdot 2x & y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \cos(x^2+y^2) \cdot 2y & y \geq 0 \\ -\cos(x^2+y^2) \cdot 2y & y < 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(x,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,0)+t(1,0)) - f(x_0,0)}{t}$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,0) - f(x_0,0)}{t} = 0$$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ esiste e vale 0.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0,0)+t(0,1)) - f(x_0,0)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0,t) - f(x_0,0)}{t} = \frac{|t| \operatorname{sen}(x_0^2+t^2)}{t}$$

esiste solo se $\operatorname{sen}(x_0^2+t^2)=0$, cioè se $x_0^2+t^2 = k\pi$, ovvero se $x_0 = \sqrt{k\pi - t^2}$

f è differenziabile nei punti $(\sqrt{k\pi - t^2}, 0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(\sqrt{k\pi-t^2},0)} \frac{f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{k\pi-t^2},0)(x-\sqrt{k\pi-t^2}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{k\pi-t^2},0)(y-0) - f(\sqrt{k\pi-t^2},0)}{\sqrt{(x-\sqrt{k\pi-t^2})^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(\sqrt{k\pi-t^2},0)} \frac{|y| \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{(x-\sqrt{k\pi-t^2})^2+y^2}}$$

OPPURE

Dimostriamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{k\pi-t^2},0)$ sono continue

$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} |y| \cos(x^2+y^2) 2x \overset{?}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$ il limite è 0 quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ è continua

$\lim_{(x,y)\to(\sqrt{k\pi-t^2},0)} |\cos(x^2+y^2)| 2y \overset{?}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$ il limite è 0 quindi $\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{k\pi-t^2},0)$ è continua.

Quindi f è differenziabile su $\mathbb{R}^2 - \{(x,y) : y=0\}$ $\cup$ i punti del tipo $(\sqrt{k\pi-t^2},0)$.

PIANO TANGENTE

Sia f differenziabile in (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$. Il PIANO TANGENTE al grafico di f in (x_0, y_0, z_0) è:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\underline{x}_0 = (x_0, y_0)$

$$\underbrace{x_{m+1}}_{z} = D_1 f(\underline{x}_0)(x_1 - x_1^0) + D_2 f(\underline{x}_0)(x_2 - x_2^0) + \dots + D_m f(\underline{x}_0)(x_m - x_m^0) + \underbrace{f(\underline{x}_0)}_{z_0}$$

Determinare il piano tangente al grafico della $f(x,y) = e^{2x-y} + \sqrt{3 + x^2 + 3y^2}$ nel punto $P = (1, 2, 5)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x-y} + \frac{1}{2\sqrt{3+x^2+3y^2}} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^{2x-y} + \frac{1}{2\sqrt{3+x^2+3y^2}} \cdot 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2e^0 + \frac{1}{\sqrt{3+1+12}} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2 + \frac{1}{4} \cdot 6 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

piano tangente: $z - 5 = \frac{9}{4}(x-1) - \frac{1}{2}(x-2)$

Il piano tangente esiste se e solo se f è differenziabile in $(x_0, y_0) = 1, 2$.
f è differenziabile in $(1,2)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{f(x,y) - D_1 f(1,2)(x-1) - D_2 f(1,2)(y-2) - f(1,2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{e^{2x-y} + \sqrt{3+x^2+3y^2} - \frac{9}{4}(x-1) + \frac{1}{2}(y-2) - 5}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{0}{0}$$ INDETERMINATO

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

MASSIMI E MINIMI LOCALI

- se $H(\underline{x}_0)$ ha $\lambda > 0$ (definita positiva) $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è di MINIMO locale
- se $H(\underline{x}_0)$ ha $\lambda < 0$ (definita negativa) $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è di MASSIMO locale
- se $H(\underline{x}_0)$ ha almeno un $\lambda > 0$ e uno $\lambda < 0$ $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ è di SELLA

1) se $\det(H(\underline{x}_0)) < 0 \rightarrow \underline{x}_0$ è di SELLA
2) se $\det(H(\underline{x}_0)) > 0$, gli autovalori hanno stesso segno.
   Si distinguono 2 casi:
   - se $tr(H(\underline{x}_0)) > 0 \rightarrow \underline{x}_0$ è di MINIMO locale
   - se $tr(H(\underline{x}_0)) < 0 \rightarrow \underline{x}_0$ è di MASSIMO locale

Trovare massimi, minimi locali e di sella per $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy - xz$

$$\begin{cases} D_1 f = 2x + y - z = 0 \\ D_2 f = 4y + x = 0 \\ D_3 f = 4z - x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = z - 2x \\ 4z - 8x + x = 0 \\ z = \frac{x}{4} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \rightarrow (0,0,0) \text{ punto stazionario}$$

$$\begin{array}{l} D_{11} f = 2 \\ D_{22} f = 4 \\ D_{33} f = 4 \\ D_{12} f = 1 = D_{21} \\ D_{13} f = -1 = D_{31} \\ D_{23} f = 0 = D_{32} \end{array} \qquad H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = H(0,0,0)$$

$\det(H(0,0,0)) = 32 - 4 - 4 = 24 > 0 \Rightarrow$ gli autovalori hanno segno uguale

$tr(H(0,0,0)) = 2 + 4 + 4 = 10 > 0 \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow (0,0)$ è di minimo

Trovare massimi, minimi locali e di sella per $f(x,y) = x^6 - 2x^4y + y^3 - y$

$$\begin{cases} D_1 f = 8x^7 - 8x^3y = 0 \\ D_2 f = -2x^4 + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad 8x^3(x^4 - y) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 = 1 \end{cases} \cup \quad \begin{array}{l} y = x^4 \\ -2y + 3y^2 - 1 = 0 \\ 3x^2 - 2y - 1 = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{array}$$

$\downarrow$

$y^2 = \frac{1}{3} \rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

punti stazionari:

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), (1,1), (-1,1)$$

$$\begin{array}{l} D_{11} = 56x^6 - 24x^2y \\ D_{22} = 6y \\ D_{12} = -8x^3 = D_{21} \end{array} \qquad H(x,y) = \begin{pmatrix} 56x^6 - 24x^2y & -8x^3 \\ -8x^3 & 6y \end{pmatrix}$$

$H(1,1) = \begin{pmatrix} 32 & -8 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 128 > 0$, $tr = 38 > 0 \rightarrow (1,1)$ è di minimo

$H(-1,1) = \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 128 > 0$, $tr = 38 > 0 \rightarrow (-1,1)$ è di minimo

$H\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ $\quad \det = 0 \rightarrow$ bisogna restringere f alle rette passanti per $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, cioè a $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e $x = 0$.

$\left(y = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Detta $g(x)$ la restrizione di f, g ammette uno sviluppo di Taylor:

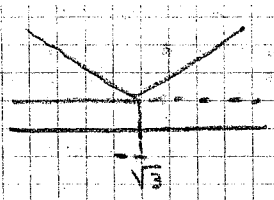
$$x^8 - 2x^4 \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

La prima derivata $\neq 0$ è quella in cui $k = 4$: 4 è pari, la derivata è < 0 quindi lungo la retta $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ f ha un massimo locale. $(x = 0)$

Master Copy COPISERIA 049/8312126 388/9837745

Se $x=0$, f diventa y^3-y

$f' = 3y^2-1>0 \rightarrow y<-\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } y>\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$



$\left(x, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow$ MINIMO

Quindi esiste una retta lungo cui f ha un MINIMO locale.

Quindi $\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ è di SELLA.

Questo vale anche per $\left(0; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Studiare eventuali punti di massimo e minimo locale di $f(x,y)=x^4+y^3-4x^2-3y^2$

$D_1 f = 4x^3-8x = 0 \quad 4x(x^2-2)=0 \rightarrow x=0, \; x=\sqrt{2}, \; x=-\sqrt{2}$

$D_2 f = 3y^2-6y = 0$

$3y(y-2)=0 \rightarrow y=0, \; y=2$

Punti stazionari: $(0,0), (0,2), (\sqrt{2},0), (\sqrt{2},2), (-\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},2)$

$D_{11} f = 12x^2-8$

$D_{22} f = 6y-6$

$D_{12} f = D_{21} f = 0$

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-8 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 48>0$, $\operatorname{tr} = -14<0 \rightarrow (0,0)$ è di MASSIMO

$H(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \det = -48<0 \rightarrow (0,2)$ è di SELLA

$H(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad \det<0 \rightarrow (\pm\sqrt{2},0)$ sono di SELLA

$H(\pm\sqrt{2},2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad \det>0$, $\operatorname{tr}>0 \rightarrow (\pm\sqrt{2},2)$ sono di MINIMO

MASTER COPY

Tel. 388/9837745