ANALISI II

Prof. PUGLISI

Stanza 122, dipartimento di matematica

puglisi@dm.unipi.it

Maria Stella GELLI

Bramanti, Pagani, Salsa.
Analisi matematica II
Zanichelli

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

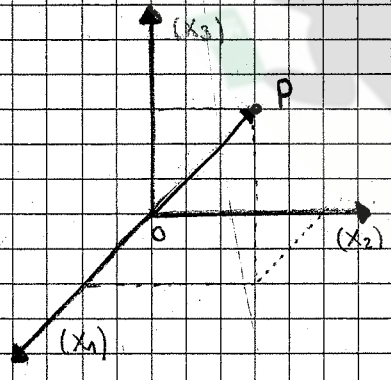
$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R} \quad 1 \le j \le n \}$ $\quad \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n}$

è l'insieme delle n-uple di numeri reali

ha la struttura di uno spazio vettoriale di dimensione n

gli n-uple numeri reali possono essere pensati come vettori con la coda nell'origine degli assi.

esempio: caso di $\mathbb{R}^3$



Per un elemento di $\mathbb{R}^3$

P può essere pensato come:

- <u>un punto</u> $P = \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{\text{coordinate}}$
- <u>un vettore</u> $OP = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{coordinate}}$

notazione: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ indica indifferentemente il punto e il vettore

Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sono definite le seguenti operazioni

OPERAZIONI DI SPAZIO VETTORIALE:

- SOMMA $\underline{x} + \underline{y}$
- MOLTIPLICAZIONE per un numero scalare in $\mathbb{R}$

FORME BILINEARI IN $\mathbb{R}^n$

① forma bilineare → è una funzione Φ
↳ significa applicazione

$\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (bilineare perché abbiamo in partenza una coppia di $\mathbb{R}^n$)

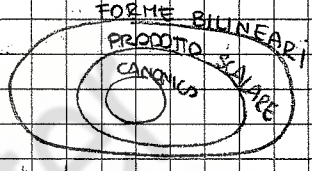
$(x, y) \mapsto \Phi((\underline{x}, \underline{y}))$ tale che

① $\Phi(x+y, z) = \Phi(x, z) + \Phi(y, z)$ → cioè è lineare nel 1° argomento

② $\Phi(\lambda x, y) = \lambda \Phi(x, y)$

③ $\Phi(x, y+z) = \Phi(x, y) + \Phi(x, z)$ → cioè è lineare nel 2° argomento

④ $\Phi(x, \lambda y) = \lambda \Phi(x, y)$



② Prodotto scalare

è una forma bilineare particolare Φ che è

a) SIMMETRICA : $\Phi(x, y) = \Phi(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

b) DEFINITA POSITIVA : $\Phi(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Phi(x, x) = 0 \iff x = 0$

Dare una forma bilineare è come dare una matrice $n \times n$

Dare una forma bilineare definita positiva e simmetrica, cioè un prodotto scalare, è come dare una matrice $n \times n$ simmetrica con tutti gli autovalori positivi.
Ad una forma bilineare $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ simmetrica e definita positiva corrisponde una matrice $\mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva, cioè con autovalori $\lambda_i \geq 0$
esempio: per $i = 1, \dots, n$

$n=2$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ MATRICE: è simmetrica ma non è definita positiva

(NOTA) data una matrice, per ricavare la forma bilineare (ci applicazione lineare) associata scriviamo a sx della matrice il vettore delle x trasposto e a dx il vettore delle y. Poi facciamo i prodotti.

come è legata alla forma bilineare?

$$(x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (2x_1 + x_2, \; x_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1 y_1 + y_1 x_2 + x_1 y_2$$ ↗ è uno scalare!

ottengo una forma bilineare che è simmetrica (perché se scambio x_1 con y_1 e x_2 con y_2 ottengo il solito risultato)

forma bilineare simmetrica se scambiando x con y il risultato non cambia.

calcoliamo gli autovalori:

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\det = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \qquad \Delta = 8 \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

gli autovalori non sono tutti positivi e quindi la forma bilineare non è definita positiva

PRODOTTO SCALARE CANONICO

$$(x_1 \; x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

1×2

→ matrice associata al prodotto scalare canonico

in generale abbiamo

MATRICE IDENTITÀ

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$$

e prodotto scalare di due vettori perpendicolari è zero;

$\Delta \cos\theta = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot 0 + 0 \cdot y_2 = 0$$

③ Prodotto scalare canonico

È una forma bilineare simmetrica e definita positiva

$$\boxed{\langle \underline{x}, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k} \quad \text{dove} \quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \; \text{e} \; y = (y_1, \dots, y_n)$$

④ Norma (rispetto al prodotto scalare canonico)

Dato un $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ la norma di $\underline{x}$ si scrive come

la norma è la radice del prodotto scalare

$$\| \underline{x} \| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$$

Proprietà

① $\| \underline{x} \| \geq 0$ (perché è una radice quadrata e inoltre il prodotto scalare è ≥ 0)

$\| \underline{x} \| = 0 \iff \underline{x} = 0$

② $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\|$ (proprietà di omogeneità)

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

③ $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ Nota: $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \cdot \cos\alpha$ ie $\cos\alpha \leq 1$!

disuguaglianza di Schwartz

dim

$0 \leq \|\underline{x} + \lambda \underline{y}\|^2 = \langle \underline{x} + \lambda \underline{y}, \underline{x} + \lambda \underline{y} \rangle =$ Sfrutto la bilinearità

$= \langle \underline{x}, \underline{x} + \lambda \underline{y} \rangle + \langle \lambda \underline{y}, \underline{x} + \lambda \underline{y} \rangle$

$= \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + \langle \underline{x}, \lambda \underline{y} \rangle + \langle \lambda \underline{y}, \underline{x} + \lambda \underline{y} \rangle$

$= \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \lambda^2 \langle \underline{y}, \underline{y} \rangle$

$= \|\underline{x}\|^2 + \lambda^2 \|\underline{y}\|^2 + 2\lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \geq 0$

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Se $\underline{y} = 0$ ho $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ ($\underline{y} = 0$) e questa è $0 \leq 0$ che vale

Se $\underline{y} \neq 0$ prendo $\lambda = -\frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|^2} \in \mathbb{R}$

Sostituisco in $\|\underline{x}\|^2 + \lambda^2 \|\underline{y}\|^2 + 2\lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \geq 0$

$\|\underline{x}\|^2 + \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2}{\|\underline{y}\|^4} \cdot \|\underline{y}\|^2 - 2\frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{y}\|^2} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \geq 0$

moltiplico tutto per $\|\underline{y}\|^2$ e ottengo

$\|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2 + \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 - 2\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2 \geq 0$

$\|\underline{x}\|^2 \|\underline{y}\|^2 \geq \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2$ e ciò equivale a dire

$\|\underline{x}\|^2 \cdot \|\underline{y}\|^2 \geq \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle^2$

↳ e se è maggiore di $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ è maggiore anche di $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle|$

④ $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$

disuguaglianza triangolare

$(\mathbb{R}^n, \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle)$ Spazio vettoriale dotato di PRODOTTO SCALARE

$(\mathbb{R}^n, \| \underline{x} \|)$ Spazio vettoriale NORMATO (possiede le 4 proprietà della norma)

$(\mathbb{R}^n, d_E)$ Spazio vettoriale METRICO

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

⑤ Distanza euclidea

In un insieme qualsiasi, ma in particolare in $\mathbb{R}^n$, si definisce distanza (tra due punti) una funzione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. siano verificate le seguenti tre proprietà:

① $d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0 \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ ed è zero solo quando $\underline{x} = \underline{y}$ (def positiva)

② $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$ (simmetrica)

③ $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$

notare che ci sono analogie con le proprietà della norma

⑥ Distanza canonica

Si dice distanza euclidea canonica in $\mathbb{R}^n$

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \| \underline{x} - \underline{y} \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

La distanza canonica verifica ovviamente le proprietà della distanza euclidea.

---

dim. della disuguaglianza triangolare

$\| x + y \|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle +$

$\langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$ (i due termini centrali sono uguali x la simmetria del prodotto scalare)

$= \langle x, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \langle x, y \rangle$

Sappiamo che $| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \cdot \| y \|$

quindi $\| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \langle x, y \rangle \leq \underbrace{\| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \|}_{\text{quadrato di un binomio}} \leq (\| x \| + \| y \|)^2$

---

⑦ Spazio METRICO EUCLIDEO → Spazio in cui non solo è definito il prodotto scalare e la norma, ma anche la distanza euclidea tra due oggetti di tale spazio.