CINEMATICA

SPOSTAMENTO = Variazione della posizione tra 2 istanti successivi

$= x_{(t_f)} - x_{(t_i)}$

$= x_f - x_i$

VELOCITÁ SCALARE MEDIA = $\frac{\text{SPAZIO PERCORSO DAVVERO}}{\text{TEMPO}}$

$= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$

VELOCITÁ SCALARE ISTANTANEA = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$= \frac{dx_{(t)}}{dt}$

$$\boxed{v_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt}}$$

$dx_{(t)} = v_{(t)}\,dt$

$$\int_{t_0}^{t} dx_{(t)} = \int_{t_0}^{t} v_{(t)}\,dt$$

$$\Delta x = x_{(t)} - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_{(t)}\,dt$$

$$x_{(t)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_{(t)}\,dt$$

Se v = costante $\Rightarrow$ $x_{(t)} = x_0 + v \int_{t_0}^{t} dt$

$x_{(t)} = x_0 + v\,(t - t_0)$

$x_{(t)} = x_0 + v\,\Delta t \qquad \Delta x = v\,\Delta t$

ACCELERAZIONE SCALARE MEDIA: $a_{(t)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$

ACCELERAZIONE SCALARE ISTANTANEA: $a_{(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv_{(t)}}{dt} = \frac{d^2 x_{(t)}}{dt^2}$

$$\boxed{a_{(t)} = \frac{dv_{(t)}}{dt}}$$

$$a_{(t)}\,dt = dv_{(t)} \qquad \int_{t_0}^{t} a_{(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t} dv_{(t)}$$

$$v_{(t)} - v_0 = \int_{t_0}^{t} a_{(t)}\,dt \qquad v_{(t)} = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_{(t)}\,dt$$

Se a = costante $\Rightarrow$ $v_{(t)} = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt$

$$v_{(t)} = v_0 + a(t - t_0)$$

$$\Delta v = a\,\Delta t$$

$$x_{(t)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_{(t)}\,dt$$

$$v_{(t)} = v_0 + \int_{t_0}^{t} a_{(t)}\,dt$$

$$\Rightarrow x_{(t)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(v_0 + \int_{t_0}^{t} a_{(t)}\,dt\right) dt$$

Se $a(t) = \text{costante}$, $t_0 = 0$, $v_0 = \text{costante}$

$$v(t) - v_0 = a(t-0) = at \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)\,dt$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0\,dt + \int_{t_0}^{t} (at)\,dt$$

$$= x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a \int_{t_0}^{t} t\,dt$$

$$= x_0 + v_0 t + a \cdot \frac{1}{2} t^2 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2} = \text{legge oraria del moto uniformemente accelerato}$$

MOTO DEI GRAVI

$a = g = \text{costante}$ $\quad t_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_f - v_i = gt$

$$t = \frac{v_f - v_i}{g}$$

$$= \frac{v - v_0}{g} \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 \left(\frac{v - v_0}{g}\right) + \frac{1}{2} g \left(\frac{v - v_0}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v v_0 - v_0^2}{g} + \frac{g}{2} \cdot \frac{v^2 + v_0^2 - 2 v v_0}{g^2}$$

$$= \frac{2 v v_0 - 2 v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2 v v_0}{2g}$$

$$x_{(t)} = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$$

$$\boxed{x = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}}$$

$$2gx = v^2 - v_0^2$$

$$g = \frac{v^2 - v_0^2}{2x}$$

$$v^2 = 2gx + v_0^2$$

$$v = \sqrt{2gx + v_0^2}$$

Se $v_0 = 0$

tale equazione ci permette di calcolare la velocità finale di un corpo che cade da un'altezza **x**, con $v_0 = 0$, per effetto dell'accelerazione di gravità

$$\boxed{v = \sqrt{2gx}}$$

MOTO DEL PROIETTILE

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_{0y} - gt = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \end{cases}$$

Mano a mano che il proiettile sale in alto, la componente lungo y della sua velocità diminuisce fino a che, dopo essersi annullata per un istante in corrispondenza dell'altezza max, cambia segno quando il proiettile comincia a cadere.
L'altezza max si trova dunque imponendo

$$v_y = 0$$

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

$$v_0 \operatorname{sen}\theta = gt$$

Esempio

$\theta = 54°$ $\quad v_0 = 13{,}5$ m/s $\quad h_{MAX} = ?$

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \qquad t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

$$= \frac{13{,}5 \operatorname{sen} 54}{9{,}81} = 1{,}113 \text{ s}$$

$$h_{MAX} = v_0 \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= 13{,}5 \cdot \operatorname{sen} 54 \cdot 1{,}113 - \frac{1}{2} 9{,}81 \cdot (1{,}113)^2$$

$$= 12{,}1558 - 6{,}076 = 6{,}079 \text{ m}$$

Dopo quanto tempo la pallina ricade a terra?
Ponga $y = 0$

$$0 = v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t\left(v_0 \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} g t\right) = 0 \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = \dfrac{2 v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \end{cases}$$