CINEMATICA

- moto rettilineo vario $v(t) = \frac{dx}{dt}$ $\quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt}$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_{v_1}^{v_2} v(t)\,dt$$

$$\begin{tikzcd} x(t) \arrow[r, bend left, "\text{Derivo}"] & v(t) \arrow[l, bend left, "\text{integro}"] \arrow[r, bend left, "\text{Derivo}"] & a(t) \arrow[l, bend left, "\text{integro}"] \end{tikzcd}$$

- rettilineo uniforme $x = x_0 + vt$

- uniformemente accelerato $\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$ $\quad x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v_x)t$ $\quad v_x^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

- proiettile $\begin{cases} x = v_0 \cos\theta t \\ y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt \end{cases}$ $\quad |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ $\quad \begin{cases} x_G = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \\ y_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g} \end{cases}$

$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{dv_x}{dv_y}$ $\quad \mathrm{tg}\,\varnothing = \frac{dy}{dx}$

angolo che la v forma con l'asse x.

- circolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt} = \frac{a_T}{R}$ $\quad a_{centripeta} \neq 0$.

- circolare uniforme $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad v_T = \omega r$ $\quad a_N = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

- circolare uniformemente accelerato $\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T = \frac{v^2}{r}\hat{u}_n + \frac{dv}{dt}\hat{u}_T$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \end{cases}$$

- armonico $\frac{d^2x}{dt} = -\omega^2 x$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$
$$v = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi)$$
$$a = -x_0^2 \omega \sin(\omega t + \varphi) = -x^2\omega$$

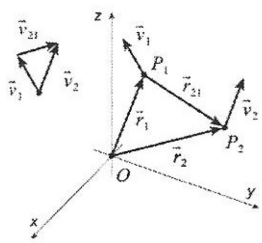
$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{-v_0}{\omega x_0}\right) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

MOTI RELATIVI

La descrizione del moto richiede la specificazione di un sistema di riferimento; generalmente viene scelto quel riferimento il cui uso semplifica i calcoli e le osservazioni. Tuttavia, poiché osservatori differenti possono adoperare diversi sistemi di riferimento, è opportuno stabilire le relazioni che intercorrono tra le osservazioni eseguite dagli osservatori differenti. Ad esempio, la maggior parte delle determinazioni svolte nell'ambito della meccanica sono relative ad un sistema di riferimento solidale alla Terra e quindi in moto con essa; la descrizione del moto della Terra nel sistema solare adopera un sistema di riferimento generalmente solidale col Sole, come il moto degli elettroni atomici è stabilito relativamente al nucleo.

Velocità relativa e accelerazione relativa

Consideriamo due punti materiali P_1 e P_2 in moto rispetto ad un sistema di riferimento con origine in O. Se $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ sono i relativi vettori posizione, le velocità dei due corpi sono rispettivamente:



$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt},$$
$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}.$$

Se consideriamo un sistema di riferimento solidale con la particella P_1, il vettore posizione di P_2 sarà:

$$\vec{r}_{21} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

per cui, dalle relazioni   la derivata rispetto al tempo di tale vettore rappresenterà la velocità di P_2 relativamente ad un osservatore solidale a P_1:

$$\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{r}_{21}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Analogamente è possibile riferire il moto di P_1 ad un sistema di riferimento solidale con la particella P_2, in tal caso il vettore posizione di P_1, sarà:

$$\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2,$$

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Quindi, confrontando le relazioni

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21},$$

$$\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{21},$$

cioè la velocità di P_2 rispetto a P_1 è uguale ed opposta alla velocità di P_1 rispetto a P_2; inoltre,
          segue che per ottenere le velocità relative delle due particelle occorre sottrarre le velocità relative all'osservatore. L'accelerazione di P_2 rispetto a P_1 vale:

$$\vec{a}_{21} = \frac{d^2\vec{r}_{21}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1,$$

mentre l'accelerazione di P_1 rispetto a P_1 è:

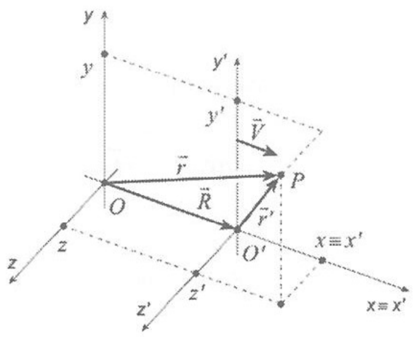
$$\vec{a}_{12} = \frac{d^2\vec{r}_{12}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2,$$

così, confrontando

$$\vec{a}_{12} = -\vec{a}_{21}.$$

Moto relativo traslatorio uniforme

Consideriamo due osservatori O e O' in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro e stabiliamo le relative descrizioni del moto di un punto materiale P. Supponiamo, per semplicità, che gli assi x e x' lungo la direzione del moto relativo coincidano e che i piani yz e $y'z'$ siano reciprocamente paralleli; supponiamo inoltre che all'istante di tempo iniziale $t=0$, le due origini O e O' coincidano. Sia:



$$\vec{R} \equiv \overrightarrow{OO'}$$

il vettore posizione dell'origine O' rispetto al sistema di riferimento con origine O, allora, se $\vec{V}$ è la velocità relativa, costante, di O' rispetto a O, risulterà:

$$\vec{R} = \vec{V}\,t\,,$$

per cui fra i vettori posizione $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ di P rispetto a O e O' sussiste la relazione:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}\,;$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t$$

a tale espressione corrispondono le relazioni scalari:

$$\begin{cases} x' = x - Vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases}$$

Si osservi che è stata aggiunta la relazione $t' = t$ per esplicitare l'ipotesi che i tempi misurati dai due osservatori siano i medesimi. In altri termini si ipotizza che le misure di tempo siano indipendenti dal moto dell'osservatore. Tale supposizione deve, naturalmente, essere eventualmente suffragata dagli esperimenti. Le relazioni che legano le osservazioni tra due sistemi di riferimento in moto traslatorio uniforme, sono dette *trasformazioni di Galilei*.

Derivando ambo i membri

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} - \vec{V}\,t\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\vec{V}\,t\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V}\,,$$

in cui $d\vec{r}/dt$ rappresenta la velocità $\vec{v}$ di P rispetto a O e $d\vec{r}'/dt = d\vec{r}'/dt'$, essendo $t' = t$, rappresenta la velocità $\vec{v}'$ di P rispetto a O', così risulta:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}\,,$$

che corrisponde alle relazioni scalari:

$$\begin{cases} v'_x = v_x - V, \\ v'_y = v_y, \\ v'_z = v_z. \end{cases}$$

Calcolando la derivata seconda

$$\vec{a}' = \frac{d^2\vec{r}'}{dt'^2} = \frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r} - \vec{V}\,t\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{V}\,t\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$$

dove $d^2\vec{r}/dt^2$ è accelerazione $\vec{a}$ di P rispetto a O e inoltre $d^2\vec{r}'/dt^2 = d^2\vec{r}'/dt'^2$ è l'accelerazione $\vec{a}'$ di P rispetto a O', così da tale relazione segue:

$$\vec{a}' = \vec{a}\,,$$

DINAMICA E STATICA PUNTO

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\quad\quad$ $\vec{p} = m\vec{v}$ $\quad$ se $\quad$ m costante $\quad$ $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$ II principio della dinamica

Teorema dell' impulso $\Delta\vec{p} = J$

$m(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \quad\quad \int \vec{F} dt$

1. L'enunciato del primo principio della dinamica è:

Un corpo in quiete rimane fermo se la somma delle forze che agiscono su di esso è nulla o nel caso in cui non agisca alcuna forza. Se il corpo è in movimento, continuerà a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Da cui, cos'è l'inerzia? L'inerzia è la proprietà di un corpo di conservare il suo stato, che può essere di moto o di quiete, fino a quando su di esso non interviene una forza.

Nella realtà un corpo che si sta muovendo lentamente infine si ferma. Questa osservazione non contraddice la prima legge di Newton, perché in un sistema di riferimento reale su quel corpo agisce la forza di attrito. Invece, la prima legge di Newton va applicata in uno spazio vuoto in cui tutte le forze sono in equilibrio.

2. Il secondo principio della dinamica è anche detto principio di proporzionalità o principio di conservazione. L'enunciato del secondo principio della dinamica è:

La forza che agisce su un corpo è direttamente proporzionale alla massa del corpo e all'accelerazione, e ha stessa direzione e verso.
Quindi, l'accelerazione è proporzionale alla forza e inversamente proporzionale alla massa.

La formula del secondo principio della dinamica è:

F= m·a con F e a aventi stessa direzione e verso →.

La massa di cui parla Newton in questa seconda legge è detta massa inerziale perché è la misura della resistenza di un corpo accelerato.

Infatti, pensa se esercitassi una forza di uguale intensità prima su un corpo di piccola massa, come una mela, e poi su uno di massa maggiore, come una sedia. La mela volerà via. La sedia si sposterà di poco.

Dalla seconda legge di Newton deriva l'unità di misura della forza che nel Sistema Internazionale, SI, è il newton, N. 1N equivale alla forza che serve a imprimere un'accelerazione di 1m/s2 a un corpo che ha 1kg di massa.

3. Il terzo principio della dinamica è conosciuto anche, semplificando, come principio di azione e reazione. L'enunciato del terzo principio della dinamica è:

Per ogni forza che un corpo A esercita su un altro corpo B, ne esiste un'altra uguale, in modulo e direzione, e contraria in verso, che B esercita su A.

La formula del terzo principio della dinamica è:

FAB = – FAB

Le due forze, che agiscono su corpi diversi, sono due grandezze vettoriali uguali e contrarie.

Ma se la forza con cui un energumeno spinge un ragazzino è la stessa che dal ragazzino torna sull'energumeno, perché il ragazzino vola via e l'energumeno no? Perché la forza, come abbiamo visto con il secondo principio, dipende anche dalla massa. Oggetti che subiscono la stessa forza ma hanno masse diverse subiranno diverse accelerazioni.

Quindi, cos'è la forza? La forza è una grandezza vettoriale che origina dall'interazione di due o più corpi ed è sempre associata a una variazione di velocità.

Inoltre, dalla terza legge della dinamica deriva il principio secondo il quale se un corpo si trovasse da solo nello spazio non sarebbe sottoposto ad alcuna forza.

LEGGI DI CONSERVAZIONE – RIEPILOGO CONCETTI FONDAMENTALI

Il **lavoro** L compiuto da una forza $\vec{F}$ su un punto materiale che si sposta da un punto A ad un punto B lungo un cammino γ è dato da

$$L = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \tag{1}$$

dove l'integrale da A a B è fatto lungo il cammino γ.

Definiamo la **potenza istantanea** $W(t)$ sviluppata da una forza al tempo t come il rapporto tra il lavoro dL compiuto tra t e $t + dt$ e l'intervallo di tempo dt:

$$W(t) = \frac{dL}{dt} = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t). \tag{2}$$

Definiamo la **potenza media** $\overline{W}$ sviluppata nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2 come il rapporto tra il lavoro L compiuto in tale intervallo e l'intervallo medesimo $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\overline{W} = \frac{L}{\Delta t}. \tag{3}$$

L'**energia** di un copo rappresenta la misura del lavoro che un corpo può compiere per il fatto di trovarsi in un determinato stato.
Definiamo l'**energia cinetica** di un punto materiale di massa m che si muove con velocità (scalare) v come

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2. \tag{4}$$

Definiamo l'**energia potenziale gravitazionale** di un corpo di massa m che si trova ad un'altezza h rispetto al suolo come

$$U = mgh. \tag{5}$$

Definiamo l'**energia potenziale elastica** di una molla di costante elastica $k > 0$ compressa o allungata di un tratto x rispetto alla posizione di equilibrio $x = 0$ come

$$U = \frac{1}{2} kx^2. \tag{6}$$

La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un corpo viene chiamata **energia meccanica**.
Si noti che l'energia è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria. Non contano cioè per i problemi di meccanica i valori assoluti dell'energia ma la differenza di energia tra lo stato iniziale e lo stato finale.

Il **teorema delle forze vive** afferma che il lavoro compiuto dalla forza agente su un corpo materiale quando questo passa da una posizione A ad una posizione B attraverso una traiettoria γ è uguale alla differenza tra le energie cinetiche possedute dal punto materiale nella posizione finale e in quella iniziale:

$$L = E_{c,B} - E_{c,A} = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2. \tag{7}$$