STATISTICA I:

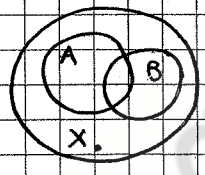
26/SETTEMBRE/2012

- PROF MARCO ROMITO
- LIBRO S. ROSS, MCGRAW-ITALIA. INTRODUZIONE alle PROB. (NO).
  PROBABILITA' E STATISTICA PER L'INGEGNERIA O LE SCIENZE. (APOGEO).
- Romito @dm.unipi.it
- www.dm.unipi.it/pages/Romito.

PROBABILITA' DI BASE: → INSIEMISTICA.
→ FUNZIONI (DENSITA' e altre).
→ TEOREMI LIMITE, ...

- **INSIEMISTICA:**

OGGETTI:

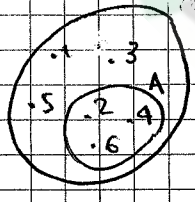


UNIVERSO S (Ω) → (non nel senso assoluto del termine)

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

- A è un evento.
- x è un evento elementare.
- A^c è il complementare di A.
- A∪B, A∩B, Ø, S sono esempi di eventi.

ESEMPIO: PROBLEMA CONCRETO IL LANCIO DI UN DADO.
C'è un'incertezza sul risultato.



eventi elementari

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

non è detto ingenuamente x' si sta illudendo altrimenti che c'è incertezza

$A = \{2,4,6\}$ eventi DEI NUMERI PARI.

AFFERMAZIONE: USCIRA' UN NUMERO PARI.

$\updownarrow$

$A = \{2,4,6\}$

A^c accadrà l'opposto di A.

$A^c = \{1,3,5\}$

- A∪B accadrà A oppure B.
- A∩B accadrà simultaneamente A e B.

Es. $A = \{2,4,6\}$ $B = \{1,2\}$

$A \cup B = \{1,2,4,6\}$

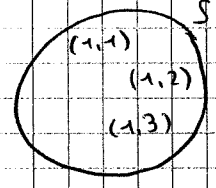
$A \cap B = \{2\}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

PROBLEMA 2 : LANCIAMO 2 DADI : CONCRETO

$S = \{(a,b) \quad a = 1,\dots,6 \; ; \; b = 1,\dots,6\}$

$(3,5) \neq (5,3)$ COPPIE ORDINATE come se li lanciassimo in successione.



A = "al primo lancio esce 5"

$A = \{(5,1),\dots,(5,6)\}$

B = "al secondo lancio esce 4"

$B = \{(1,4),\dots,(6,4)\}$

$A \cup B = \{(5,1),\dots,(5,6),(1,4),\dots,(6,4)\}$

$A \cap B = \{(5,4)\}$

CONCETTO DI PROBABILITA' : APPLICAZIONI = REGOLE DI CORRISPONDENZA.

Sia S un universo finito.
Una PROBABILITA' su S è una FUNZIONE P che associa ad ogni evento A un numero P(A), in modo che:

i) $P(A) \in [0,1]$

ii) $P(S) = 1$

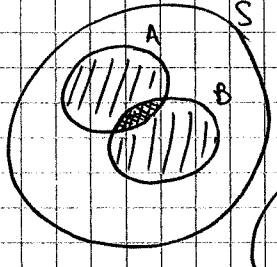
iii) Se $A_1,\dots,A_n$ sono eventi DISGIUNTI (ovvero $A \cap B = \emptyset$) } $\Rightarrow P(\emptyset) = 0$

allora la PROBABILITA' della loro unione è uguale alla somma delle loro probabilità.
Allora:

$$P\left(\bigcup_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1} P(A)$$

OSS. 1 : E' utile interpretare la probabilità come una massa.

OSS. 2 : Sono vincoli.



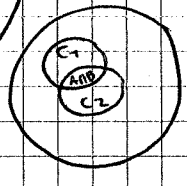
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

DIMOSTRAZIONE (non viene chiesta all'esame)

$C_1 = (A \setminus B)$

$A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup (A \cap B)$

questi tre insiemi sono disgiunti quindi vale la regola di sopra.



$$P(A \cup B) = \boxed{P(C_1) + P(C_2) + P(A \cap B)} - P(A \cap B)$$
$$\boxed{+ P(A \cap B)}$$

$A = C_1 \cup (A \cap B)$ (DISGIUNTI)

$B = C_2 \cup (A \cap B)$ (DISGIUNTI)

$P(A) = P(C_1) + P(A \cap B)$

$P(B) = P(C_2) + P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A^c) = 1 - P(A)$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

Dimostrazione:

$S = A \cup A^c$ (DISGIUNTI)

$1 = P(S) = P(A) + P(A^c)$

Esempio: lancio di un dado

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ decidiamo arbitrariamente che la probabilità che esca:

$P(S) = 1$

$P(\{n\}) = \frac{1}{6} \quad n = 1, \dots, 6$

cerco la probabilità che esca un numero pari.

$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$ (DISGIUNTI)

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- In un universo finito S conoscere P equivale a conoscere la probabilità dei singoletti $P(\{x\}) \quad x \in S$.
  p_x

$\{p_x : x \in S\} \longleftrightarrow P$

$\longleftarrow : p_x = P(\{x\})$

$\longrightarrow : P(A) = \sum_{x \in A} p_x$

Definizione:

Una P su un universo finito S si dice equiprobabile uniforme se p_x è costante. (è lo stesso $\forall x \in S$).

$\Rightarrow P = \frac{1}{\text{card}(S)}$

Dimostrazione:

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\} \qquad P(S) = \sum_{x \in S} P(\{x\})$$

$$1 = \sum_{x \in S} \lambda$$

$$\lambda = p_x \quad \forall x \in S$$

$$= \lambda \, card(S)$$

OSS. 1:

Se è equiprobabile.

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(S)}$$

Dimostrazione

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \qquad P(A) = \sum_{x \in A} P(\{x\})$$

$$= \sum_{x \in A} \frac{1}{card(S)}$$

$$= \frac{card(A)}{card(S)}$$

Esempio: lancio di due dadi:

$$S = \{(a,b) : a,b = 1, \dots, 6\}$$

Essendo un universo finito se assegnamo le probabilità dei singoletti, abbiamo assegnato tutto.
Se poi decidiamo che sia equiprobabile è ancora più semplice.

$$P((a,b)) = \frac{1}{36}$$

Conseguenze:

P(al primo lancio esca 5)

$$P(\{(5,1), \dots, (5,6)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

le coppie in questo caso sono i singoletti.

P(al secondo lancio esca 1) $= \frac{1}{6}$

RICAPITOLANDO:

- S spazio degli esiti.
- Eventi.
- P evento → numero.

  - $0 \leq P(E) \leq 1$ E = evento
  - $P(S) = 1$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$
    - $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
    - $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_n)$

PROBABILITÀ = modernizza un avvenimento casuale prima che questo avvenimento sia accaduto.

STATISTICA = studia lo stesso avvenimento dopo che è accaduto.

- Lancio di 1 moneta:

  $S = \{T, C\}$ $P(\{T\}) = P(\{C\}) = 1/2$

- Lancio di 2 monete:

  $S = \{(T,T); (T,C); (C,T); (C,C)\}$ ← qui le coppie si dicono ordinate.

  $\{(T,T); (T,C); (C,C)\}$

MODELLI EQUIPROBABILI:

S spazio degli esiti.

$S = \{x_1, \ldots, x_n\}$

$P(\{x_i\}) = \frac{1}{n}$

Se E è un evento

$P(E) = \frac{\text{numero degli elementi dell'evento}}{\text{numero degli elementi dello spazio degli esiti}} = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745