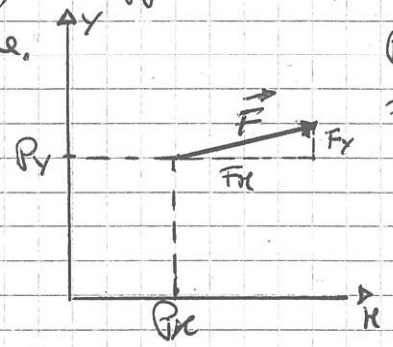
Richiami di statica del corpo rigido.

Punto materiale = Oggetto dotato di massa, idoneo alla rappresentazione di sistemi effettivamente puntiformi.

Corpo rigido = Oggetto "estesa", dotato di massa. Può essere costituito da un insieme di punti materiali (le cui distanze relative è costante) o da corpi continui.

Forza = È una grandezza vettoriale che si manifesta nell'interazione due, due o più corpi. È possibile distinguere vari tipi di forze: 1) di contatto (attrito, elastica, Spinta Archimedea);
2) a distanza (gravità, elettrica, magnetica, etc);
3) forte } che riguardano interazioni
4) debole } di sistemi subatomici.

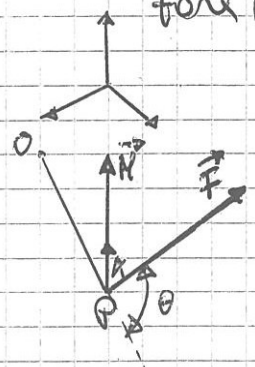
Nel fisico, una forza è rappresentata da un vettore e dal suo punto di applicazione.



Momento: Il momento di una forza, rispetto a un polo "O" è definito come il prodotto vettoriale della posizione del vettore (relativa al polo) per il vettore stesso:

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{F} = (P-O) \wedge \vec{F}$$

[si applica la regola della mano destra, puntando il pollice nella direzione del vettore (P-O) e l'indice in quella del vettore $\vec{F}$, la posizione del dito medio ci indicherà direzione e verso del momento "M_O".



Le coordinate dei due vettori sono: $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = |\vec{OP}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta \cdot \vec{k}$$

"k_n" è un versore che forza $\vec{OP}$ su $\vec{F}$ mediante una rotazione destrorsa.

Forza risultante = La risultante di un insieme di forze "F_i" è data da: $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$

Contrariamente alle singole forze, la risultante non è un vettore applicato.

Momento Risultante = Rappresenta la somma vettoriale dei momenti calcolati per ciascuna forza rispetto ad un polo "O": $\vec{M}_{RO} = \sum_i \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i$

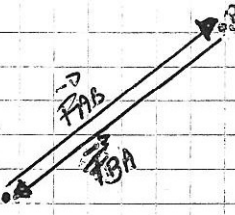
Come avviene per la risultante, il momento risultante non è un vettore applicato.

Le forze possono, anche, essere definite rispetto a un sistema materiale come:

INTERNE = Se scambiate tra punti del sistema;

ESTERNE = Se scambiate tra punti del sistema e corpi esterni al lo stesso (mediante contatto o azioni a distanza).

In ossequio al 3° principio della dinamica, le forze interne scambiate tra due punti del sistema sono uguali e opposte e giacciono lungo



lo stesso retta d'azione. Per questo motivo, le forze interne ad un sistema, prese a due a due, costituiscono un sistema a risultante nulla ($\vec{R}_{int}=0$) e momento risultante nullo ($\vec{M}_{int}=0$).

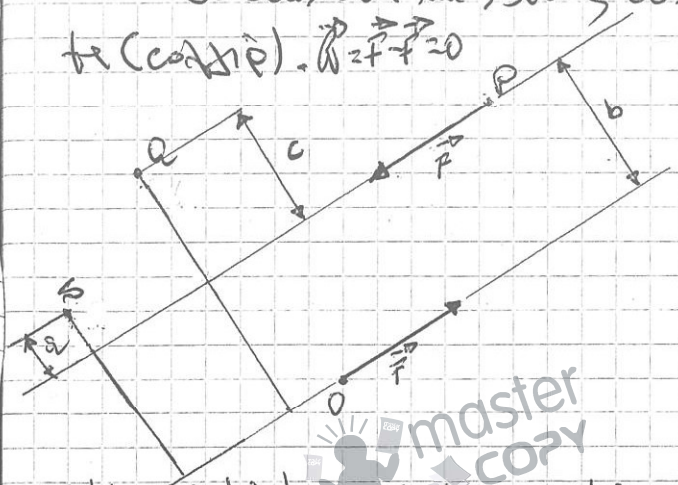
EQUILIBRIO DEL CORPO RIGIDO = La condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido si trovi in equilibrio (considerato che $\vec{R}_{int}=0$ e $\vec{M}_{int}=0$) è rappresentata da:

$$\begin{cases} \vec{R}_{ext}=0 \\ \vec{M}_{ext}=0 \end{cases}$$ **EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA.**

È possibile dimostrare che nel caso di risulti $\vec{R}=0$, il calcolo del momento $\vec{M}$ del sistema di forze risulta indipendente dalla scelta del polo.

Esempio

Si consideri un sistema costituito da due forze uguali ed opposte (coppia). $\vec{R} = \vec{F} + \vec{F} = 0$



Calcoliamo il momento rispetto al polo "Q" e rispetto al polo "S":

$M_Q = F(b+c) - F \cdot c = F \cdot b$

$M_S = F(a+b) - F \cdot a = F \cdot b$

II

master copy

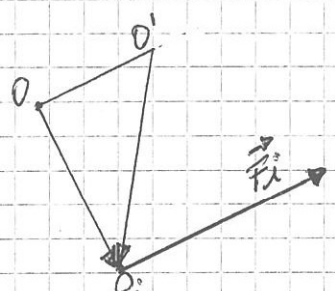
Sistemi di forze staticamente equivalenti.

Due sistemi di forze si dicono "staticamente equivalenti" se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto a un qualsiasi polo.

Ne consegue che se due sistemi hanno la stessa "$\vec{R}$" e lo stesso momento risultante "$\vec{M}$" rispetto a un polo "O", hanno lo stesso momento risultante rispetto ad ogni polo "O'". Infatti:

$$\vec{M}_{RO'} = \sum_i \vec{O'P_i} \wedge \vec{F_i} = \sum_i (\vec{O'P_i} + \vec{O'O}) \wedge \vec{F_i} = \vec{OP_i} \wedge \vec{F_i} +$$

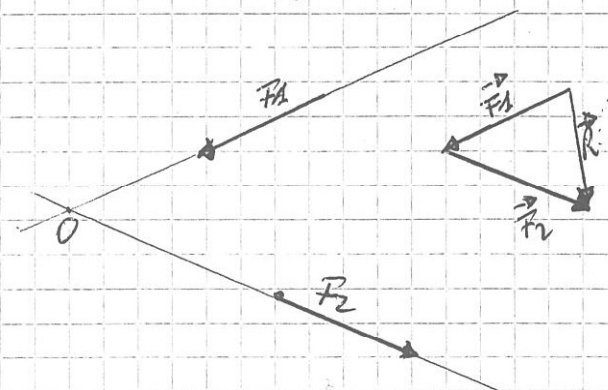
$$+ \vec{O'O} \wedge \vec{F_i} = \vec{M}_{RO}$$



E' possibile studiare l'equilibrio di un corpo rigido sostituendo il sistema di forze agente con uno equivalente.

Esempio

Calcolare la forza equivalente al sistema di forze $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$. La forza equivalente deve avere la stessa "$\vec{R}$" e lo stesso "$\vec{M_R}$" rispetto a qualsiasi polo. Scegliamo, ad esempio il punto "O". Il vettore risultante lo calcoliamo con la regola del parallelogramma



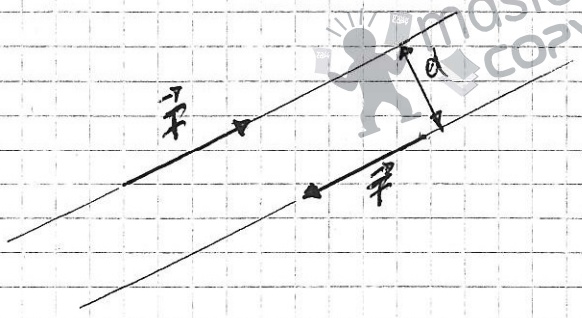
La forza $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ ha lo stesso risultante del sistema di forze

è lo stesso momento risultante rispetto al polo "O" e, quindi, è "STATICAMENTE EQUIVALENTE".

Esistono casi in cui $\vec{R}=0$ e $\vec{M}_{R0}\neq 0$, il più semplice dei quali è dato da una coppia di forze aventi su rette parallele, uguali in modulo e di verso opposto.

In tal caso il sistema è equivalente a una coppia pura:

$$M_R = F \cdot d$$



master copy

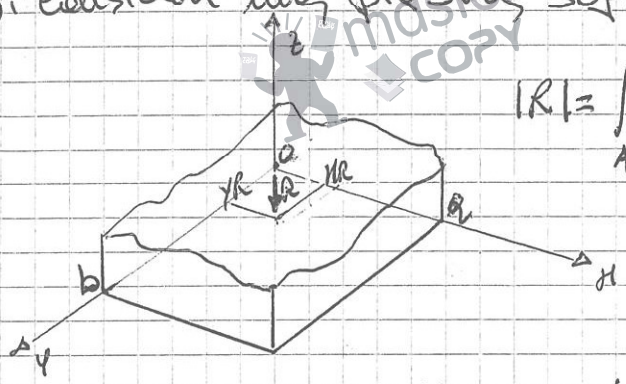
master copy

Carichi distribuiti

Oltre alle cosiddette "forze concentrate" viste finora (applicate a superfici di dimensioni trascurabili rispetto a quelle del corpo), lo stesso corpo può essere soggetto a "forze distribuite" (ad esempio, vento, peso proprio, forze centrifughe, etc).

Anche in tal caso, è possibile determinare una forza equivalente che abbia la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

Si consideri una piastra soggetta a una pressione $p(x,y)$.



$$|R| = \iint_A p(x,y)\cdot dA$$

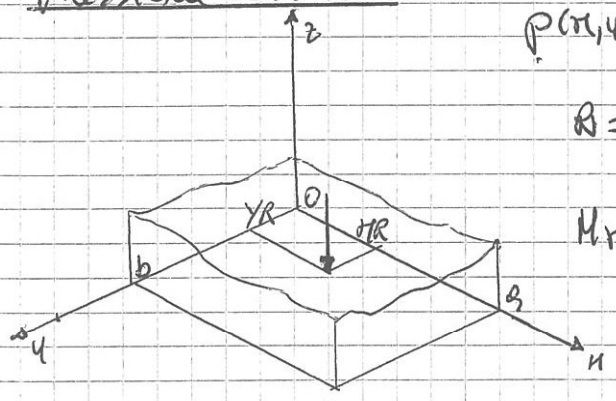
$$M_x = |R|\cdot y_R = \iint_A p(x,y)\, y \cdot dA$$

$$M_y = |R|\cdot x_R = \iint_A p(x,y)\cdot x \cdot dA$$

da cui: $x_R = \dfrac{\iint_A p(x,y)\cdot x\cdot dA}{|R|}$

$$y_R = \frac{\iint_A p(x,y)\, y\cdot dA}{|R|}$$

Pressione costante



$$p(x,y) = p_0$$

$$R = \iint_A p_0\, dA = p_0 (a\cdot b)$$

$$M_x = R\cdot y_R = \iint_A p_0 \cdot y\, dA = \int_0^a \int_0^b p_0 \cdot y \cdot dy \cdot dx =$$

$$= p_0\, a \cdot \frac{b^2}{2}$$

$$y_R = \frac{p_0 \cdot a\, b^2/2}{R} = \frac{p_0 \cdot a \cdot b^2/2}{p_0 \cdot a \cdot b} = \frac{b}{2}$$

Analogamente $x_R = \frac{a}{2}$.